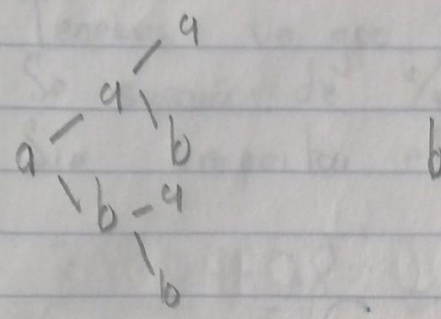
1-



2-

Numeros			Letras		
10 dígitos			27 letras		

$27^3 \cdot 10^2$

3-

3a
5b
2c
d

Principio Fundamental del conteo

PF Aritmetica Todo numero entero positivo puede factorizarse

PF Algebra Todo polinomio se factoriza en $(x-r)\cdot(x-r_1)\ldots$

PF Conteo Si una actividad puede realizarse de n formas diferentes y una 2da actividad de m formas diferentes ∴ $n \cdot m$

Ej Hay 30 alumnos

Se escogerán a 3 personas

$30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$

Si no están ordenados

Si ~~lo están~~

1	2	3		2	3	1
1	3	2		3	1	2
2	1	3		3	2	1

$\} 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Si lo están $\rightarrow \frac{24360}{6} = 4060$

Otro ej. Tenemos 52 cartas

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!}$$

Tenemos n objetos y se extraerán ordenadamente r objetos

Primero: r debe ser menor o igual a n $r \leq n$

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \underline{n-3} \quad \underline{n-4} \quad \underline{n-5} \quad \cdots \quad n-(r-1)$$

Los Factoriales:

$5! = 120$

$$\frac{n-(r-1)}{(n-r)!} \rightarrow \frac{n!}{(n-r)!}$$

$0! = 1$ Por definición

1.- Tenemos un gpo de 30 alumnos y otro de 27
Se sacará de c/gpo 3 personas
Sin importar el orden

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{} = \frac{30!}{27!}$$ } Esta es ordenada

Pero sin orden: Se divide entre 6 → 3!

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} \quad \text{ó} \quad \frac{30!}{27! \cdot 6}$$

Del otro grupo:

$$\frac{27!}{24! \cdot 3!}$$

La cantidad entre ambos grupos es

$$\frac{30!}{\cancel{27!} \cdot 3!} \cdot \frac{\cancel{27!}}{24! \cdot 3!} = \frac{30!}{24!(3!)^2}$$

Entonces: $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ { Esta es la no ordenada
Esta es combinación

La ordenada es permutación

$$\downarrow$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejercicios:

1:

Letras _ _ Numeros _ _ _

$27 \cdot 27 \cdot 10^3 = 729 \cdot 1000 = 729000$

$27^2 = (25+2)^2 = 625 + 100 + 4$

729 → 10 1 1

Porque aquí no se extrae nada, se pueden repetir

2- 4 colores $\frac{4!}{2!} = 12$

3- 10 preguntas 5 opciones

5 posibilidades _ Puede repetirse

∴

a) 5^{10}

b) 4^{10} porque hay 1 respuesta mal de las 5

4- Hay 6 letras debe haber DEF

$\frac{3!}{1} = 6$

Al inicio hay 4 opciones
La cadena, a, b ó c

4! 24

5:
24·6
Porque son 24 las posibilidades en las que esten juntas pero en DEF puede ser DFE, FED... o sea 6 posibilidades más

144

6: 6 personas _ _ 6! _ _ _
a 1

$\frac{6!}{1!} = 5! = 120$

EXTRA: Cubo de 6 caras a las que se le pintará de 6 colores pero debe de ser distintos cuando se voltea y todo :v
Son 720 sin ser ordenados 6!
Pero ordenados:



1 2 3 4 5 6
6 1 2 3 4 5

El arenero - Euclides

Vamos a asignar un color al inferior
Blanco

$$5 \times 6 = 30$$

Un tetraedro de 4 caras:
Habrá 1 cara de color $\therefore 4 - 1 = 3$

$$4 \times \frac{3!}{3} = 8$$

Ahora se puede repetir:

$$5$$

Ahora con el cubo:

6N
6B
5N 1B
5B 1N
4N 2B
4B 2N
3B 3N

} 7

Prueba: Megamynx

12N	B	8N	B
11N	B	7N	B
10N	B	6N	
9N	B		

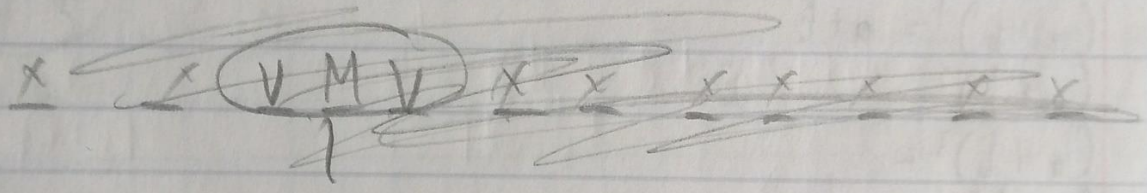
Analisis del cubo:

6 N		1	
6 B		1	
5 N	1	1	
5 B	1	1	10
4 N	2	2	
4 B	2	2	
3 B	3 N	2	

7 - 10 , 4

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

8 - 12



6 M
3 V
1 C

~~10!~~ VMVMVMVMV ... MMM

3M 1C 4! 24

4 3 2 1 16

X M M M

_M_M_M_M_M_M_M_

Hay 5 venusinos
El 1º puede estar en 8 lugares $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7!$
Así reconociendo a c/venusino y marciano

Si no se distingue: $\frac{12!}{7! \cdot 5!}$

Coeficiente Binomial

5x
3y
8z

$\binom{n}{r}$ $\binom{n}{r_1 r_2 r_3}$

Debe ser suma

Coeficiente multinomial

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 =$
$(a+b)^3 =$
$(a+b)^4 =$
$(a+b)^8 =$
$(1+x)^{-1} =$
$1 -$

$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \ldots$

$\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ $\binom{n}{3}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ $\therefore (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^n b^k$

Tarea

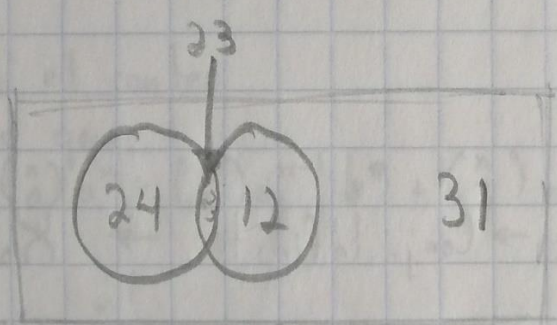
9.- $n+2$

10.-

		2		2		3			6			10
0	0	1	0	0	1	0	1	2	0		0	
0	1	1	2	3	2	4	3	2	5		6	
6	6	6	5	6	5							
6	5	4	5	3	4							
		2		2		3			6			10

46

11.- $U = 67$



31 personas

12.-

45 35

16

13:- ?

14:- 8

Soluciones

$A_0 = \emptyset$

9:- A_1 {1} → {1} {}

A_2 {1,2} → (1) (2) (1,2) ()

A_3 {1,2,3} → (1), (2), (3), (1,2), (1,3) (2,3), (1,2,3) ()

cant elem. n	cant subconj
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
n	2^n

$2 \cdot 4 = 8$

$(n-1)^2 + n$

N = {1, 2, 3, 4, 5} → Conj. Infinito → $\aleph_0$

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Numeros primos

El 1 no es primo :v

2 - 2' Si es

3 - 3' Si es

4 - 2^2 No es

5 - 5' Si es

6 - 2' · 3' No es

7 - 7' Si es

8 - 2^3 No

9 - 3^2 No

10 - 5' · 2' No

11 - 11' Si

Aleph - Borges

$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3}$

ej $= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \ldots \rightarrow 2$

Para ponerlo en coordenadas se ve el exponente

2 (1, 0, 0, 0, 0 ...)
7 (0, 0, 0, 1, 0 ...)
6 (1, 1, 0, 0, 0 ...)
2, 3, 5, 7, 11

Si tenemos dos conjuntos del mismo tamaño se puede asociar un elemento del conjunto A con el B

Conjunto natural es del mismo tamaño que Conj. quebrados
Los reales no :v

$\mathbb{N} = \aleph_0$ — Aleph$_1$ — Aleph - Affaleto
$R = 2^{\aleph_0}$ ó $\aleph_1$ — Aleph$_2$ — Hebreo

Relación con el conteo
Cuando vimos que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 \ldots \binom{n}{n} b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$\binom{3}{2}$ Quiere decir que de un conj de 3 elementos se tomarán subconj de 2 elementos

Ej: $\binom{n}{0}$ Siempre será 1

y también se puede hacer así $a = 1 \quad b = 1$

$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$

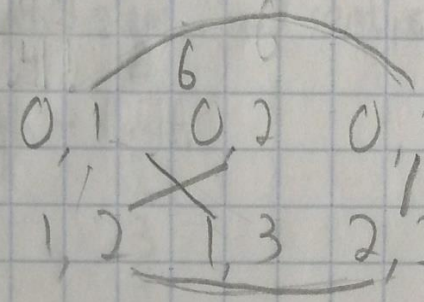
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \cdots\ \binom{n}{k}\ \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{n+1}{0}\ \binom{n+1}{1}\ \cdots\ \binom{n+1}{k+1}\ \cdots$$

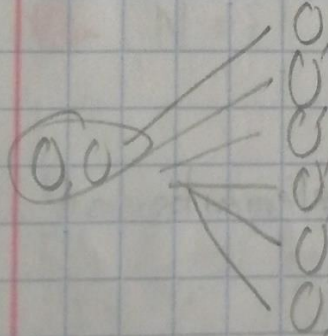
10.

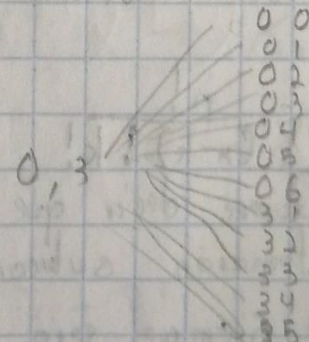
0, 1, 2, 3 Sin contar los mulos



0,1 – 1,2 – 2,3 – 3,0

Para las mulas





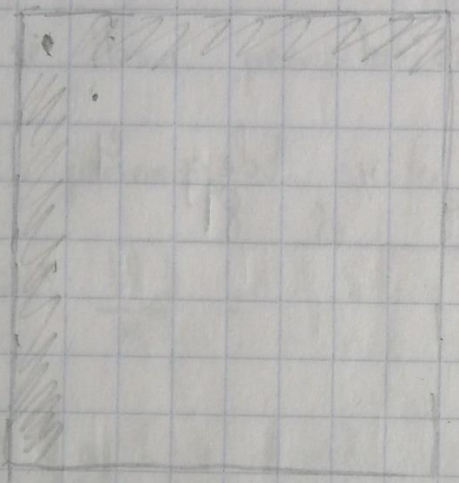
Hay 7 mulas y 6 posibilidades para c/u

$7 \cdot 6 = 42$

$$\frac{21 \cdot 10}{2}$$

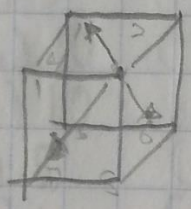
11:- 8 :(

12:- Las torres se mueven horizontal y vertical
Hay 8·8 lugares
Si ponemos una en una esquina nos quedan
7·7 lugares y así



8! = 40320

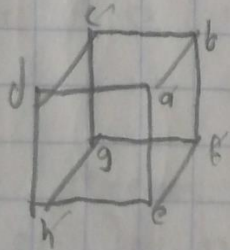
13:-



Hay 2 grupos

1 2 3 4 5 6 7 8

1/76



Podemos hacer 2 grupos

a	b
c	d
f	e
h	g

Usaremos 1 gpo

a - c	a - c	a - c
c - a	c - f	c - h
f - h	f - h	f - a
h - f	h - a	h - f

Caso 1
Que a se mueva
a h

Son 3

Para que $a \to f = 3$
$a \to h = 3$

En el gpo acfh hay q y $bdeg$ q
q^2 ó $8!$

Ej 1:
Si tenemos un gpo de 4 estudiantes y queremos 3 para ir a un museo

A B C D → U = 4

Resp = 24 :v

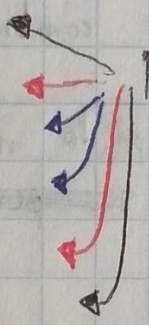
A esto se llama permutación de 4 en 3 ó $_4P_3$

Ej 3: 11 personas sólo filas de 7

$_{11}P_7 = \frac{11!}{4!} = 1,663,200$ formas

Ej 4: X = {a, b, c, d, e}

i) 1 $\binom{5}{0}$
ii) 5 $\binom{5}{1}$
iii) 10 $\binom{5}{2}$
iv) 10 $\binom{5}{3}$
v) 5 $\binom{5}{4}$
vi) 1 $\binom{5}{5}$



Propiedad: $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1}$

En combinaciones

1- Tengo AZAR ¿cuantas palabras puedo formar?

4! :v

Pero A se repite por lo que hay que descontar

$\frac{4}{2}$

Si tenemos r objetos donde el 1ro se repite n_1 veces y el 2do n_2 veces y el rsimo, n_r veces, entonces su permutación se repite, suponiendo que $n = n_1 + n_2 \dots n_r$

sería $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \dots n_r!}$

AB B1

Ejercicio

a) $\binom{6}{3}$ $\frac{6!}{3!\cdot 3!}$ $\frac{6!}{36} = 20$

b) $\binom{7}{5}$ $\frac{7!}{2!\cdot 5!}$ 21

c) $\binom{3}{3}$ $\frac{3!}{0!\cdot 3!} = 1$

a) 6 cantantes se ~~presentarán~~ audicionarán en un concierto, pero en él sólo se admite la entrada a 3 ¿de cuantas formas se podrían hacer arreglos para que entren 3 cantantes?

b) Tienes que extraer de una bolsa con 7 globos de distinto color, 5 globos ¿cuantas combinaciones de colores se pueden hacer?

c) Pedro tiene 3 canicas y decide meter las 3 canicas en 1 caja ¿de cuantas maneras ~~se pueden~~ pueden estar las 3 canicas en la caja?

2- ¿Por que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Porque en la formula

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} \rightarrow \frac{n!}{(n-(n-r))!\cdot(n-r)!\cdot r!\cdot(n-r)!}$$

Por eso mismo

3- formula de Pascal = $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$

$n=3$ 4.

$r=2$ $2\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

$4 = 3 + 1$ $10 \quad 6 \quad 4$

4- $V = 30$

P	S	eq1	eq2	eq3
30	29	28	26	24

$$\frac{{}_{28}C_2 \quad {}_{26}C_2 \quad {}_{24}C_2}{3!}$$

$$\frac{378 \quad 325 \quad 276}{3!}$$

Porque no importa el orden

4,916,457,000

5- 10 niños
15 niñas

$$\cancel{\underline{\ }_{15} \cdot \underline{\ }_{14} \mid \underline{\ }_{10} \cdot \underline{\ }_{9} \cdot \underline{\ }_{8} = 151,200}$$

$15C2 \cdot 10C3$
$15C1 \cdot 10C4$
$15 \quad 10C5$
16002

$$\underline{\ }_{15} \mid \underline{\ }_{10} \cdot \underline{\ }_{9} \cdot \underline{\ }_{8} \cdot \underline{\ }_{7} = 75,600$$

$$\underline{\ }_{10} \cdot \underline{\ }_{9} \cdot \underline{\ }_{8} \cdot \underline{\ }_{7} \cdot \underline{\ }_{6} = 30,240$$

257040

6- _ _ _ _ _ _ _ _

51 3!

$5! \cdot 3!$

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

7.- M = 2
A = 3
T = 2
E = 1
I = 1
C = 1

$n = 10$

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

151,200

8.- 5 5 1 1 1 .5 .5 .5 .5

9 lugares

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!}$$

1260

9.- 52 cartas totales

a) $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!}$

b) $48 \cdot 13$

Restantes Cantidad de pares

c) 48

d) $\binom{13}{5} = \frac{13!}{5!\,8!}$

e) 1 2 3 4 5 Hay 9 formas para $9 \cdot 4 = 36$
2 3 4 5 6 hay 4 palos

f) $4C2 \cdot 4C3 = 24$

Teo. Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$(a+b)^0 = 1 \qquad \binom{1}{0}$

$(a+b)^1 = a + b \qquad \binom{1}{0} \binom{1}{1}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$

¿Cuál es el desarrollo de $(a+b+c)^3$?

$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + \ldots$

$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1}$

Chequemos que $a^{n-k} b^k$ puede sacarse como $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$(a+b+c)^n = \sum_{k+j+i=n} \binom{n}{k,j,i} a^k b^j c^i$$

En donde a se repite $n-k$ veces y b k veces

2- $(a+b)^7$

¿Cuál coeficiente será de $a^5 b^2$

21

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!}$$

3- $(a+b+c+d+e)^9$ Para $a^5 b^2 c d$

$$\frac{9!}{5!2!1!1!0!}$$

1512

4- Probar que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n} = 2^n$$

1 2 4

Problemas de Tarea

1- 999999

a) 991...

$x = 0-9 \quad 10n$

$y = 2-9 + 0 \quad 9n$

$z = 2-8 + 0 \quad 8n$

$\frac{1}{x} \quad \frac{9}{y} \quad \frac{9}{y} \quad \frac{10}{z} \quad \frac{10}{z} \quad \frac{10}{z}$

$10 \quad 9 \quad 9 \quad 8 \quad 8 \quad 8$

$\frac{9}{} \quad \frac{}{x} \quad \frac{}{x} \quad \frac{}{x} \quad \frac{}{x} \quad \frac{}{x}$

414720

100,000

314720

b) $10^6 - 9^6 = 468,559$

2c

_ _ _ _ _ _ _ _ _

3r $\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!}$ 1260

4a

2v

_ _ _ _ _ _ _ _ _

3r $\frac{8!}{3! \cdot 4!}$ 280

4a

V 1260 - 280 = 980

3c

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$$

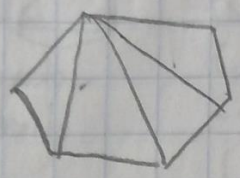
$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

1 x
9 y
x z

$x \times y \quad z = 2$

Problemas con angulos

¿Cuanto mide c/u de los angulos internos de un polígono n-regular?

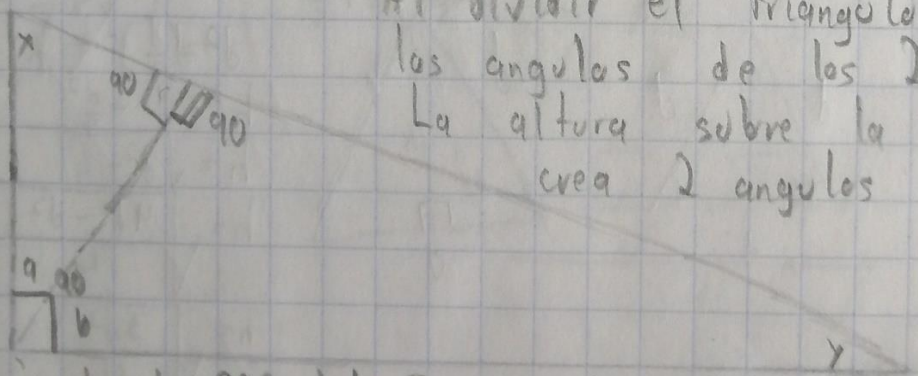


Son 6 lados, formamos 4 triangulos
c/u son 180°
$180 \cdot (n-2)$ es la suma de todos los angulos
$\frac{180 \cdot (n-2)}{n}$ es el valor de cada angulo en una n figura

En un triangulo ABC y DEF, $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$
Demostrar que $\angle C = \angle F$

$A+B+C = 180°$
$DEF = 180°$
~~$A+B+C = D+E+F$~~

Sea ABC un triangulo rectangulo con $\angle A = 90$ demostrar que la altura por A divide al triangulo en 2 triangulos semejantes



Al dividir el triangulo en 2 más los angulos de los 2 suman 360
La altura sobre la hipotenusa crea 2 angulos de 90°

El angulo de 90° del T principal se divide en 2 angulos más

$x + 90 + a = 180 \therefore x + a = 90$ Y si $a + b = 90 \therefore b = x$
$y + 90 + b = 180 \therefore y + b = 90$ $y = a$

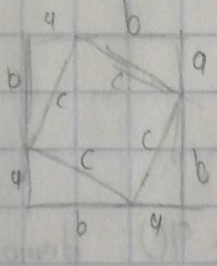
EE3.3

$b = d + c$

MR3.3

Pendiente

Teorema de Pitagoras

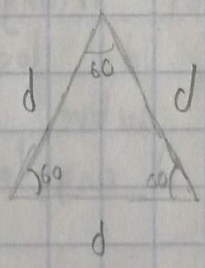


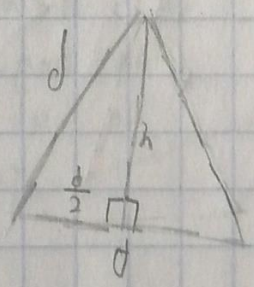
$c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$ $\qquad a^2 + 2ab + b^2$

$c^2 + 2ab \rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

Demostrar que el area de un triangulo equilatero de lado d es $\frac{d^2\sqrt{3}}{4}$





$d^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

$h^2 = d^2 - \frac{d^2}{4}$

$h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}}$

$h = \sqrt{\frac{4d^2 - d^2}{4}}$

$h = \sqrt{\frac{3d^2}{4}}$

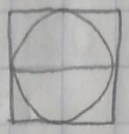
$h = \frac{d\sqrt{3}}{2}$

$\frac{dh}{2} \rightarrow \frac{d \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$

2:-



Cuadrado inscrito

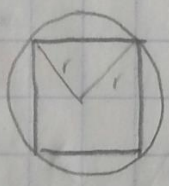


Cuadrado Circunscrito $(2r)^2$

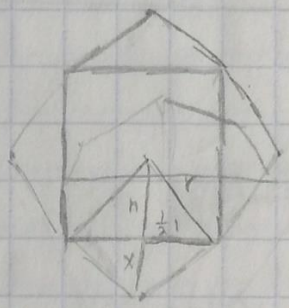
$$\frac{2r^2}{4r^2} = \frac{r^2}{2r^2} \quad \frac{1}{2}$$

$$r^2 + r^2 = 2r^2$$

3:-







$$x + h = r$$

$$r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$\sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} \qquad \frac{1}{2}1 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \qquad \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2}r\right) = x$$

$$\frac{r - \frac{\sqrt{2}}{2}r \cdot \sqrt{2} \cdot r}{2} \qquad \frac{r^2\sqrt{2} - \frac{2r^2}{2}}{2}$$

$$2\left[\frac{r^2\sqrt{2} - r^2}{2}\right]$$

$$2r^2\sqrt{2} - 2r^2$$

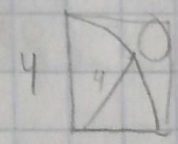
$$2r^2\sqrt{2} - 2r^2 + 2r^2 = \text{Aoctagono}$$

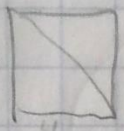
$$\frac{A_{cuadrado}}{A_{octagono}} = \frac{2r^2}{2r^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

32 | 2
16 | 2
8 | 2
4 | 2
2 | 2
1

16.2

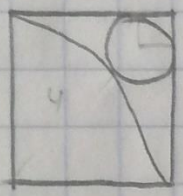
11:-





$4^2 + 4^2 = 32$

$\sqrt{32} = 5.7$

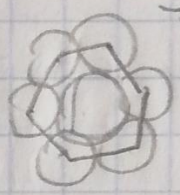


$\sqrt{32} - 4 = r^2 + r^2$

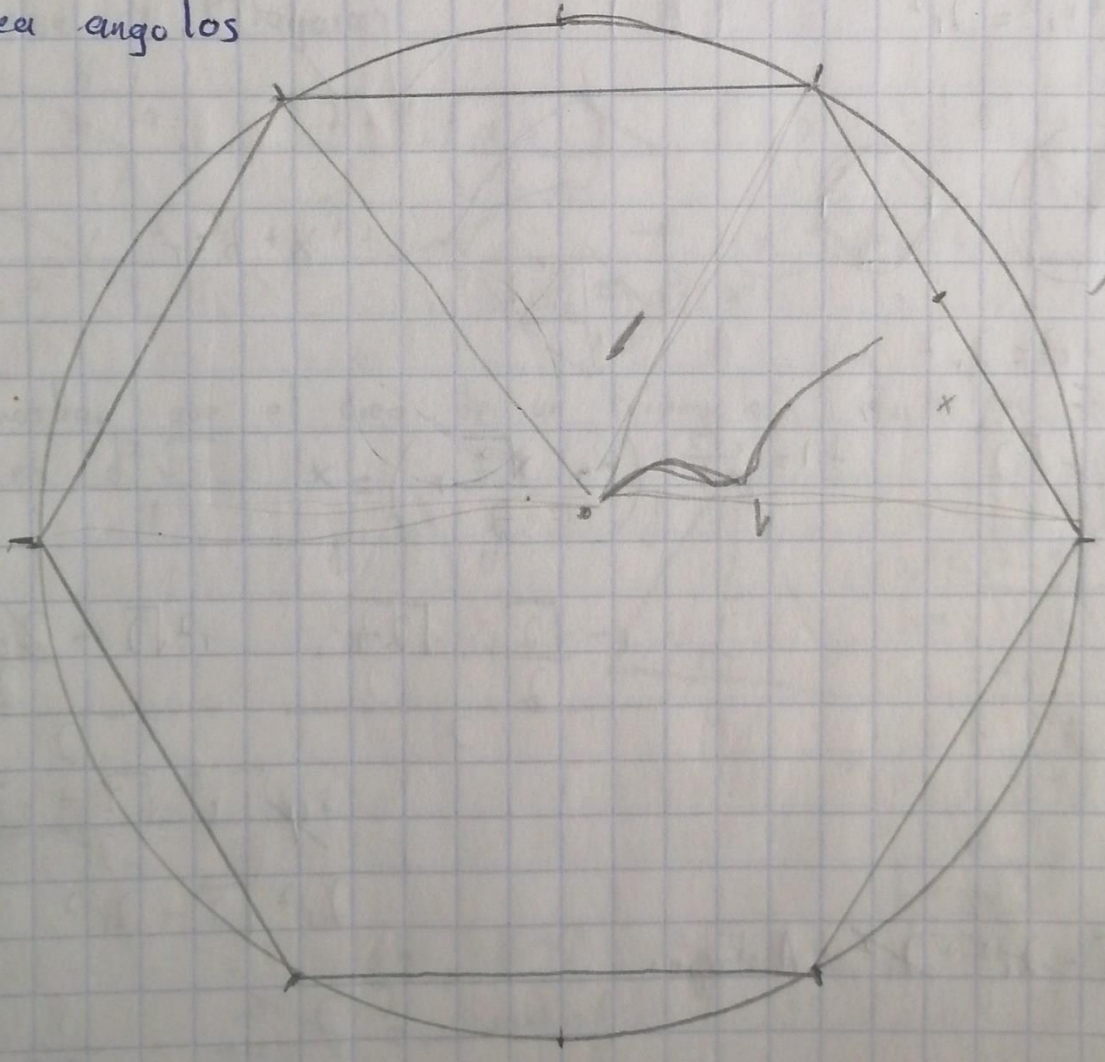
$\sqrt{32} - 4 = \sqrt{2}r^2$

$\sqrt{32} - 4 = r\sqrt{2}$

$4\sqrt{2} - 4 = r\sqrt{2}$



Tarea angulos



1.1.2

cte + ∂ + α = 180

Explicar

1.5

3.25

$180 - (40 - \alpha) =$ $\quad \beta = 180 - 40 - \alpha$

$40 + \alpha + \beta = 180$ $\quad (180 - 40 - \alpha) + x = 180$

$x = 180 - 180 + 40 + \alpha$

$x = 40 + \alpha$

$180 = (40 + \alpha) + \alpha + y$

$180 = 40 + 2\alpha + y$

$140 = 2\alpha + y \rightarrow 140 - y = 2\alpha \quad \frac{140 - y}{2} = \alpha$

$180 = y + 2z$

$180 = 40 + y + 2\alpha$

$180 = 40 + 2\alpha + y$

$\alpha = 40$

$y = 60$

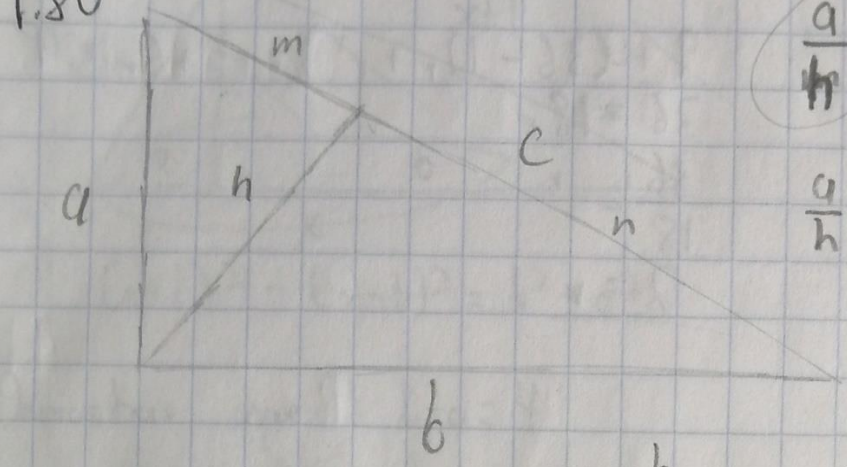
ADE

$180 = 60 + 2z$

$\frac{120}{2} = z$

z

Resolución
1.80



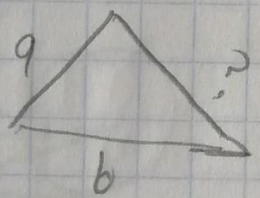
$$\frac{a}{h} = \frac{b}{n} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{h} = \frac{c}{b} \therefore h = \frac{ab}{c}$$

Lados	h	c + h	a + b
h	$\frac{ab}{c}$	$\frac{ab}{c} + c$	$a + b$
c + h	$\frac{a^2b^2}{c^2}$	$c^2 + 2ab + \frac{a^2b^2}{c^2}$	$a^2 + 2ab + b^2$
a + b			c^2

$$c^2 + 2ab + \frac{a^2b^2}{c^2} = c^2 + 2ab + \frac{a^2b^2}{c^2}$$

Imaginemos

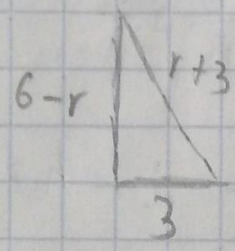


¿Cual sería lo más grande que podría medir ese otro lado? $a + b$
¿Y menor? $b - a$
Desigualdad en triangulo

Si construyes un □ en el cateto A y otro en el cateto B, su area = a la del cateto C
¿Y si en lugar de □ son Δ o semicirculos?
Pues es igual xd

Teorema inverso de Pitagoras
Si los lados de las areas de 2 cuadrados = al 3ero entonces es T rectangulo

1.10.17



$9 + (36 - 12r + r^2) = r^2 + 6r + 9$

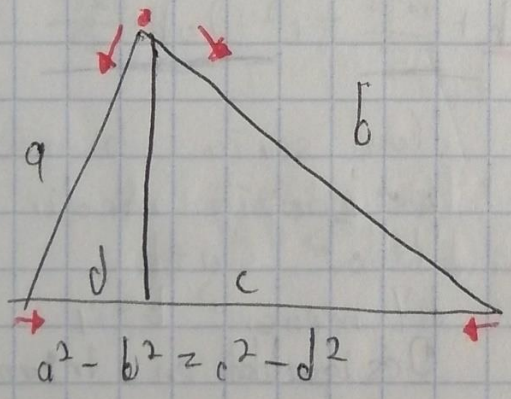
$36 = 18r$

$\frac{36}{18} = r$

$2 = r$

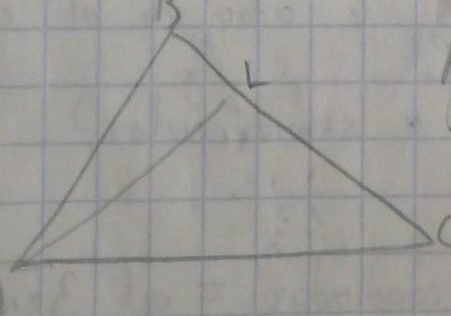
Lema de Carnot

Sea ABC un triangulo acutángulo y al trazar una altura del vertice A a la que llamaremos L
Demostrar que $AB^2 - AC^2 = BL^2 - CL^2$



$a^2 - b^2 = c^2 - d^2$

Supongamos que es casi rectangulo

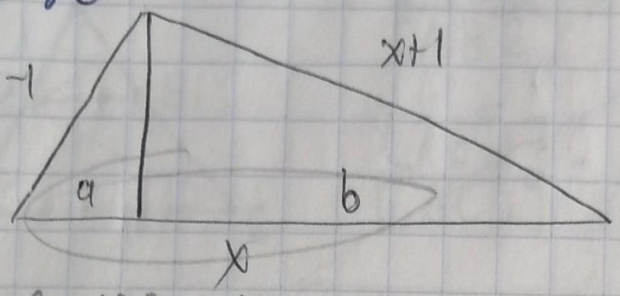


$AB^2 = BL^2 + AL^2$

$AC^2 = AL^2 + LC^2$

Se sustituye y Jo

1.10.20



$(x+1)^2 - (x-1)^2 = b^2 - a^2$

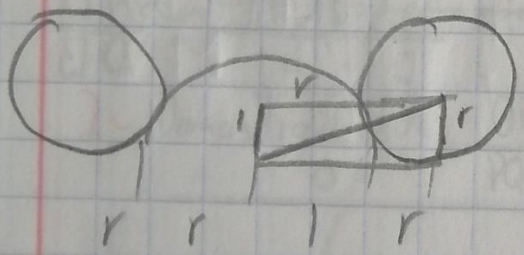
Demostrar que $b-a=4$

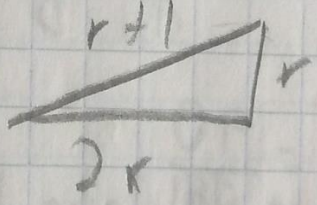
$x^2+2x+1-(x^2-2x+1)=(b-a)(b+a)$

$4x=(b-a)(x)$

$4=b-a$:v

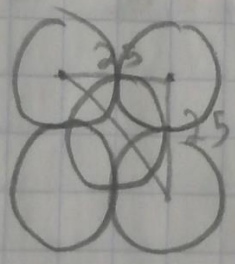
Solucion 1.10.18

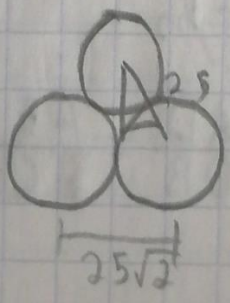




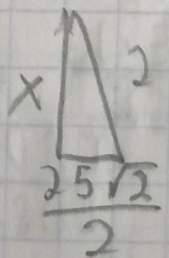
1.10.14

$d=25$



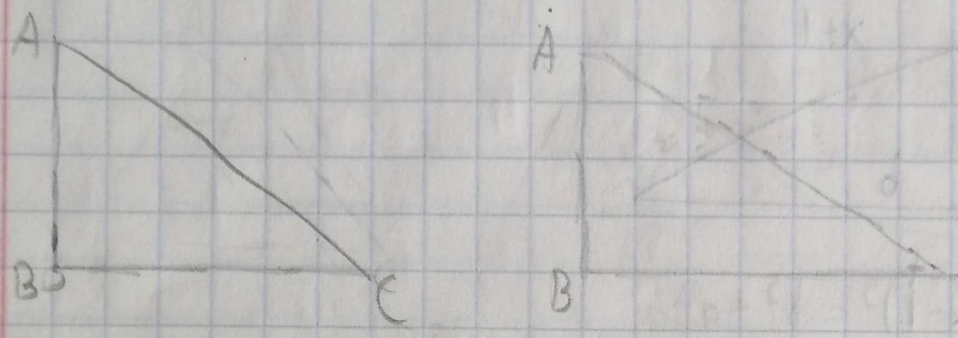


$I\frac{25}{2}$



Teorema de Tales

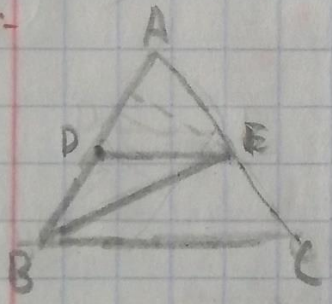
1.-

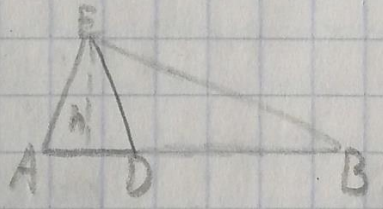


$\frac{BC \cdot BA}{2}$ $\frac{BD \cdot BA}{2}$ Razon entre sus areas

$\frac{\frac{BC \cdot BA}{2}}{\frac{BD \cdot BA}{2}} = \frac{BC}{BD}$ Razon entre sus bases

2.-





$\frac{\frac{AD \cdot h}{2}}{\frac{DB \cdot h}{2}} = \frac{AD}{DB}$

3.- Es lo mismo pero del otro lado

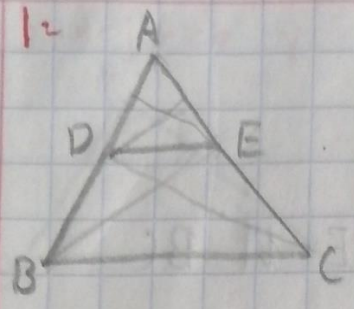
4.- $[BDE] = [DEC]$

h_1 y h_2 $\parallel$ a DE y BC $\therefore$ $h_1 = h_2$

$\frac{DE \cdot h_1}{2} = \frac{DE \cdot h_2}{2}$

5.- Si $\frac{[ADE]}{[DBE]} = \frac{[ADE]}{[DEC]}$ $\therefore$ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

1-



$$\frac{[ADE]}{[ABE]} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{[AED]}{[ACD]} = \frac{AE}{AC}$$

ADE esta en ambos triangulos $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

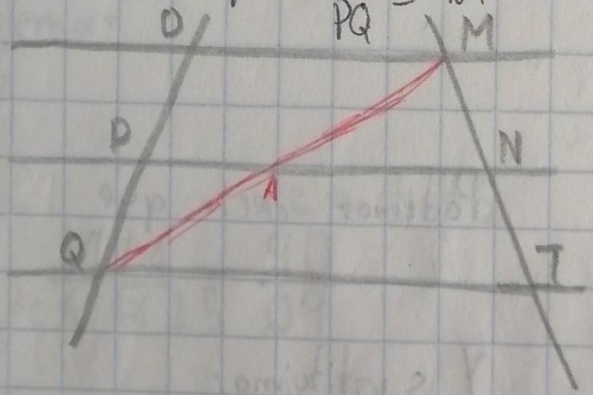
Otra forma

Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces $\frac{AD}{DB} + \frac{DB}{DB} = \frac{AE}{EC} + \frac{EC}{EC}$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

Y ~~como ADE es la misma en ambos triangulos~~

2- Demostrar que $\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$

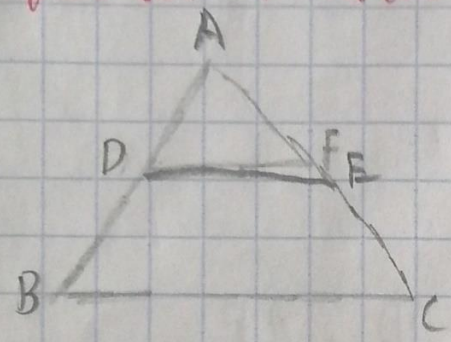


$$\frac{OP}{PQ} = \frac{MA}{AQ}$$

$$\frac{MN}{NT} = \frac{MA}{AQ}$$

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$$

Recíproco del T Tales



Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Demostrar que $DE \parallel BC$

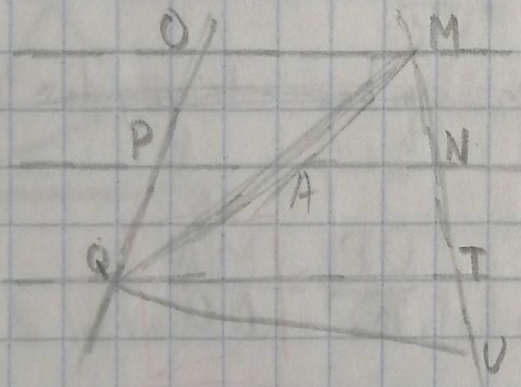
Supongamos que $DE \not\parallel BC$ pero digamos que $Df \parallel BC$

Entonces $\frac{AD}{DB} = \frac{Af}{fC}$ y podemos sustituir $\frac{AD}{DB}$

$\frac{Af}{fC} = \frac{AE}{EC}$

Con eso concluimos que E debe ser F

2-



Sabemos que $OM \parallel PN$

y $\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$

Supongamos que $QT \not\parallel PN$

Pero pensemos que $QU \parallel PN$

Podemos decir que

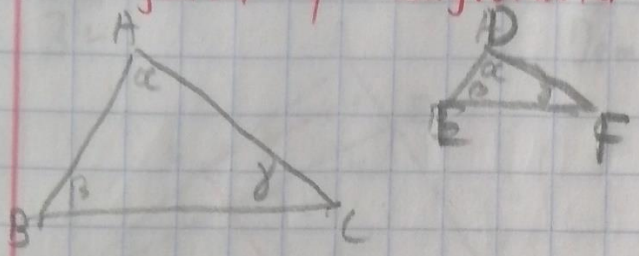
$\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NU}$

y sustituimos

$\frac{MN}{NU} = \frac{MN}{NT}$

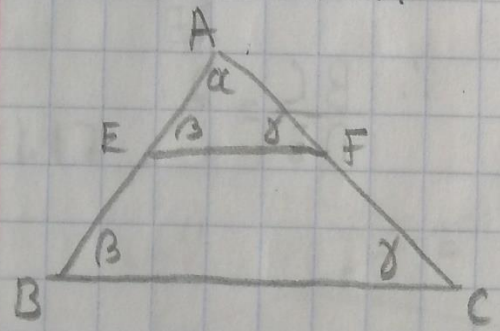
Por lo que U debe ser T

Semejanza y Congruencia



$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Para demostrarlo:



Y pos ya xd $BC \parallel EF$

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

Ejemplo 1.4.1

$x = 6$:V

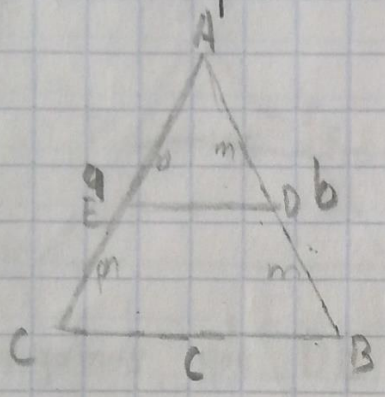
Problemas:

1.16

$a = 10$ $\quad c = \frac{a}{2} = 5$ $\quad d = \frac{a}{4} = 2.5$ $\quad b = \frac{3a}{4} = 7.5$

$a + b + c + d = 25$

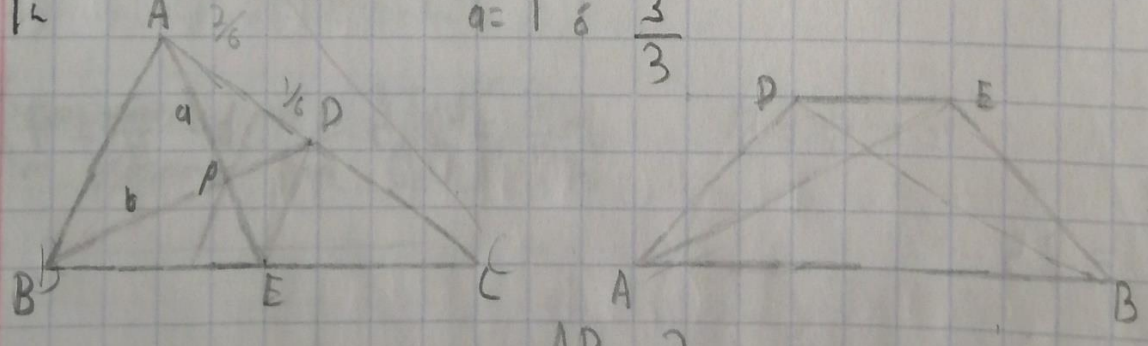
Demostrar que



Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ y $\frac{AB}{AD} = 2$ asi como $\frac{AC}{AE} = 2$

$\therefore \frac{BC}{DE} = 2$

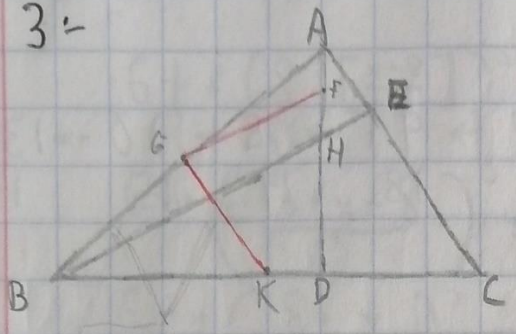
Demostrar que BC ∥ ED



$a = 1$ & $\frac{3}{3}$

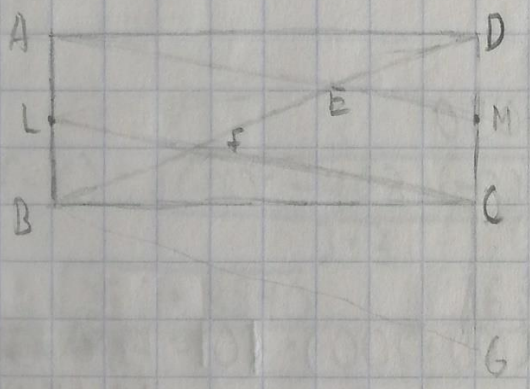
$\frac{AB}{DE} = 2$

3:-

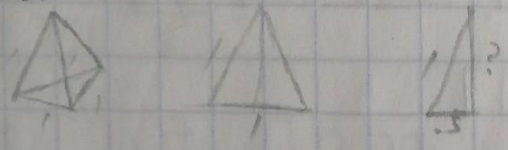


Demostrar que $\angle FGK = 90°$

1.17



2:-



55
-30

505
50
000
25250

300
56
000
15000

Sumatorias

1-5 = 15

1-6 = 21

1-7 = 28 → 36 → 45 → 55 → 66 → 78 → 91 → 105 → 120 → 136
8 9 10 11 12 13 14 15 16

1-16 = 136 → 153
17

1+20 = 21 21·10 = 210
2+19 = 21
3+18 = 21

1+100 = 101 101·50 = 5050
2+99 = 101
3+98 = 101

4- F. de Gauss $\frac{n(n+1)}{2}$ $\frac{(100+200)}{2}\cdot 101 = 15,150$

5- (505)·50 = 25,250

6- 1+3 = 4
1+3+5 = 9

$\frac{[(n\cdot 2)+1][((n\cdot 2)+1)+1]}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n)}{2}$

1, 3, 5

$\frac{n(2n)}{2} = n^2$

$\frac{n\cdot 2\cdot n}{2} = n^2$

64 64 256 384 096

$(6+(\frac{x}{2}-2))^2$ $36+(x^2-4x+4)$ $40+x^2-4x$

$8+\left(\frac{x-8}{2}\right)$

16 16 46 16 256

$2\overline{)33}$ 16 13 1

$13.33-6=9.88$ 2.33

$8=8$ $8+(\frac{x-8}{2})$ x

$$64+(8+[\tfrac{x-8}{2}])^2=x^2$$

$$64+\left(\frac{16+x-8}{2}\right)^2=x^2$$

$$64+\left(\frac{8+x}{2}\right)^2=x^2 \rightarrow 64+\left(\frac{64+16x+x^2}{4}\right)=x^2$$

$3\overline{)13.3}$ 10 10

320 12 640 320 3840

$$64+\left(16+4x+\frac{x^2}{4}\right)=x^2$$

$$80+4x+\frac{x^2}{4}=x^2$$

$$320+16x+x^2=4x^2$$

$$0=3x^2-16x-320$$

$$\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4(3)(-320)}}{2\cdot 3}$$

$$\frac{16\pm\sqrt{256+3840}}{6} \rightarrow \frac{16\pm\sqrt{4096}}{6} \rightarrow \frac{16\pm 64}{6}$$

$5\,14$ 64 16 48

$$\frac{16+64}{6} \qquad \frac{16-64}{6} \qquad -\frac{48}{6}$$

$$\frac{80}{6}=13.33 \qquad -8$$

13 $6\overline{)80}$ 20 20

8 10.16 13.33 cy m zalis :')

a b c

$x-d+9+x-d=27$

9- $(x-d)+x+(x+d)=27$ $\quad (x-d)^2+x^2+(x+d)^2=\frac{511}{2}$

$3x=27$

$x=9$

$(9-d)+9+(9+d)=27$ $\quad (9-d)^2+9^2+(9+d)^2=\frac{511}{2}$

$81-18d+d^2+81+81+18d+d^2=\frac{511}{2}$

$(3\cdot 81)+2d^2=\frac{511}{2}$

243

$2d^2+243-\frac{511}{2}=0$

$2d^2+\frac{81}{3}-\frac{511}{2}=0$

$2d^2+\frac{162}{6}-\frac{1533}{6}=0$

$2d^2-\frac{1371}{6}=0$

$2d^2=228.5$

$d^2=\frac{228.5}{2}$

$d=\sqrt{114.5}$

Progresión Geometrica

$$S = \frac{a_1 - r^n a_1}{1-r}$$

1- $1 \cdot \frac{10^7 - 1}{10-1}$ $\quad 1 \cdot \frac{9999999}{9}$

1111111 xd

2- $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} \cdots \frac{1}{99\cdot 100}$

2 6 12 20 30 42

4 6 8 10 12

Esta es una suma telescopica $\therefore \frac{1}{1} - \frac{1}{100}$

$\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \frac{9}{4^2\cdot 5^2} \cdots \frac{199}{99\cdot 100}$

$1 - \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$ $\quad \frac{1}{9} - \frac{1}{12}$ $\quad \frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2}$

$\frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$ $\quad 1 - \frac{1}{100^2}$ $\therefore 1 - \frac{1}{10,000}$

36 $\quad \frac{10000}{10,000} - \frac{1}{10000}$

$\frac{9999}{10,000}$

1-

2- $x + xy + xy^2 = 117$ $\quad x(1+y+y^2) = 117$

$x = \frac{117}{1+y+y^2}$

$x \cdot xy \cdot xy^2 = 19683$

$x^3y^3 = 19683$

$x = \sqrt[3]{\frac{19683}{y^3}}$ $\quad \frac{117}{1+y+y^2} = \sqrt[3]{\frac{19683}{y^3}}$

$x + x\cdot 3 + x\cdot 9 = 117$

$x + 3x + 9x = 117$

$13x = 117$

$x = 9$ $\quad \frac{117}{1+y+y^2} = \frac{27}{y}$

$117y = 27 + 27y + 27y^2$

$27y^2 - 90y + 27 = 0$

$y_1 = 3$

$y_2 = .33$

$n_1 = 9$

$n_2 = 27$

$n_3 = 81$

3- $A_0 = 10,000$ $\quad$ Hace 4 años

$A_n = 9,000$

$A_2 = 8,100$

$A_3 = 7290$

$A_4 = 6561$

4-

$U_1 = 5$

$U_n = 1215$

$\Sigma = \frac{a^1 - r^n a^1}{1-r}$ $\quad a_n = a_1 \cdot (r^n)$

$1820 = \frac{5 - r^n \cdot 5}{1-r}$ $\quad 1215 = 5 \cdot r^n$ $\quad 5r^n - 1215 = 0$

$r^n = \frac{1215}{5}$

$1820 - 1820r = 5 - r^n \cdot 5$

$5r^n - 1820r + 1815 = 0$

$r^n = \frac{1820r - 1815}{5}$

$5\left(\frac{1820r - 1815}{5} = \frac{1215}{5}\right)$

$r = \frac{3030}{1820}$ $\quad r = 1.664$

Tarea

1.

2.- $3 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad \dots \quad 3^{210}$
$1 \quad 2 \quad 3$

3.- $C_1 = 256\ cm^2$ 256
$C_2 = 128\ cm^2$
$C_3 = 64\ cm^2$
$C_4 = 32\ cm^2$
$C_5 = 16\ cm^2$
8

$16, 8\sqrt{2}, 8, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4$

512

4.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \dots \frac{1}{n\cdot n+1}$$

$$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \dots \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}$$

$$1 - \frac{n}{n+1}$$

Bases

Ej

$115_{10} = \quad {}_3$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 3\overline{)115} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3\overline{)38} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3\overline{)12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3\overline{)4} \\ 1 \end{array}$$

11021_3

Se comprueba:

$1(3^0) + 2(3^1) + 0(3^2) + 1(3^3) + 1(3^4)$

$1 \quad 6 \quad 0 \quad 27 \quad 81$

115

$244_{10} = \quad {}_{16}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 16\overline{)244} \\ 6 \quad 6 \quad 84 \\ 4 \end{array}$$

$f4_{16}$

0, 1, 2 ... 9, a, b, c, d, e, f

Para regresar a $_{10}$

~~4(10~~ $4(16^0) + 6(16^1)$

$4 \cdot 1 + 15 \cdot 16$

244

Si queremos $(\ )_x = (\ )_y$

Primero $(\ )_x = (\ )_{10}$

Y luego $(\ )_{10} = (\ )_y$

Ej $99_{10} =$ 2

$$
\begin{array}{r}
49 \\
2\overline{)99} \\
19 \\
1 \\
24 \\
2\overline{)49} \\
9 \\
1 \\
12 \\
2\overline{)24} \\
0 \\
6 \\
2\overline{)12} \\
0 \\
3 \\
2\overline{)6} \\
0 \\
1 \\
2\overline{)3} \\
1
\end{array}
$$

1100011

Ej $110631_{10} =$ 16

$$
\begin{array}{r}
6914 \\
16\overline{)110631} \\
96 \\
146 \\
144 \\
23 \\
71 \\
64 \\
7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 6914 \\
 & 64 \\
 & 51 \\
 & 48 \\
 & 34 \\
 & 32 \\
 & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 432 \\
 & 32 \\
 & 112 \\
 & 112 \\
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 27 \\
 & 16 \\
 & 11
\end{array}
$$

16027

Ej $102_3 = {}_2$

$2(3^0) + 0(3^1) + 1(3^2)$

$2 \cdot 1 \quad 0 \quad 1 \cdot 9$

$2 + 0 + 9$

11_{10}

$$\begin{array}{r} 5555 \\ 24 \\ \hline 22220 \\ 11110 \\ \hline 133320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 66660 \\ 2\overline{)133320} \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2\overline{)11} \\ 1 \\ 2 \\ 2\overline{)5} \\ 1 \\ 1 \\ 2\overline{)2} \\ 0 \end{array} \qquad 1011_2$$

Encuentra la suma de todos los numeros en los que aparece exactamente una vez 1, 2, 3, 4

Hay 24 numeros posibles

$$\frac{24(1234+4321)}{2} \qquad \frac{24(5555)}{2} = 66660$$

Divisibilidad

Decimos que a divide a b si $b \div a$ ~~=0~~ da de residuo 0

$$\begin{array}{r} 6 \\ 8\overline{)55} \\ 7 \end{array} \quad 8 \nmid 55 \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 3\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad 3 \nmid 24$$

~~Si a~~ Si $a \mid b$ y da c $\therefore$ $b = ac$

Los primos solo son divisibles $\div$ si mismos y 1

Criterios de Divisibilidad

2.- Porque por ejemplo 18 es un ejemplo sin

3.- ~~720~~ $360 \cdot 7 = 2520$

No $\Sigma = 21$ y esto $\div 2$ no es entero

4.- Cuando a es falso

Hay un buen 44 55 60

Cuando b es falso 42 51 60

97
8|780
968
4

17-13

Cuando e es falsa Nos vamos al infinito

Cuando d es falsa 33

~~D es la falsa~~ Había una e :'v
Es la a y el # es 101

¿Que digitos puede ser a para que 12345784 para que sea divisible entre 3 0, 3, 6 y 9
¿÷2?0 2 4 6 8
4?0, 4, 8
5?0 y 5 xd
8?4
9?6
11?4

¿Cuantos numeros hay menores o iguales que 10000 tales que sean multiplos de 11 y solo tengan digitos 1 y 9

1 9 9 1 1 1 1 1 9 9

2 · 1 · 1 · 1

9 9 9 9 9 9 9 9 1 1

2 2 2

8

Y 2 y 9? 8

12 24 36 48 60
9 18 27 36 45
3 6 9 12 15

42
21
63

18 21 24 27 36 33

9

9

¿Cuantas veces debe escribirse 123456 para que sea multiplo de 3? Pos 1 :v

12

9? 3 veces

11? 11 0_0

37+x
34+y

A3640548981270644B es divisible por 9

Calcula A y B

37 + A
34 + B

A = 9 46
B = 1 35

71

¿Cuanto vale A sa A00A es divisible ÷ 7

143
7|1001
30
21

1001
2002 ∴ tambien 4004 y 8008
3003 ∴ 6006 y 9009

286
7|2002
60
42
0

429
7|3003
20
63
0

715
7|5005
10
35
0

1001
7|7007
000

Pos todos :v

Cuantos numeros de 4 cifras que sean multiplos de 4 y acaben en 4 hay?

9 · 10

~~2 0~~
5 4
~~3 8~~
~~5 2~~
~~5 6~~

~~180~~
~~270~~
+ ~~270~~
~~450~~
~~450~~
~~1620~~

450

04 4500000
24
44
64
84

Y ahora con 8 cifras

45,00,000

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{10^5}\ \overline{5}\ \overline{1}$

9

9 $\frac{1}{9}$

$20 \mid 2$
$10 \mid 2$
$5 \mid 5$
1

$9+2=11$
$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=$

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$
$x+2=$

1- $a+b+c+d=2001$
$b+d=2002$

$a-b+c-d$

$a+c+2002=2001$
$a+c=-1 \rightarrow a+c=-1$

$-b-d=-2002$ $-b-d=-2002$

$\underline{a-b+c-d=-2003}$

2- $m+n=15$
$mn=20$

$n=\frac{20}{m}$

$\frac{1}{n}=\frac{m}{20}-m$

$\frac{n}{20}+\frac{m}{20}=\frac{n+m}{20}$

3- $x+y+z$
$x+y=12$
$x+z=17$
$y+z=19$

$x=12-y$
$z=17-x$
$y=19-z$

$x=12-7$
$x=5$

$x=12-(19-z)$
$z=17-(12-19+z)$
$y=19-12$
$y=7$

$z=17+7-z$
$2z=24$
$z=12$

$\underline{5, 7 \text{ y } 12}$

4- $xy=14+3x+2y$

$0=14+3x+2y-xy$
$-x+0=-xy+3x+2y+14-20$
$-20=-xy+3x+2y-6$
$-20=(x-2)(-y+3)$

$(x-2)(-y+3)$

$x-2=5$ $x=7$
$-y+3=-4$ $y=7$

$x-2=-5$ $x=-3$
$-y+3=4$ $y=1$

$3+5=8$

$3^2+5^2=36$

6- $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2013}$ ¿x^2+x^{-2}?

$x+x^{-1}=\sqrt{2013}$

$x^2+\frac{1}{x^2}+2=2013$

$x^2+\frac{1}{x^2}=2011$

7- $2x+3y+3z=8$

$3x+2y+3z=808$

$3x+3y+2z=80808$

$8x+8y+8z=81624$

$8(x+y+z)=81624$

$x+y+z=\frac{81624}{8}$

$x+y+z=10203$

8- $a+b=7 \rightarrow a^2+2ab+b^2=49$

$ab=5 \quad a^2+b^2=39$

a^3+b^3

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$7(a^2-5+b^2)$

$7(39-5)$

$7(34)$

238

$ab+a+b+2=0$

$ab-a-b+1=-1$

$(a-1)(b-1)=-1$

$a-1=1$

$b-1=0$

$2^3+0^3=8 \rightarrow \underline{8}$

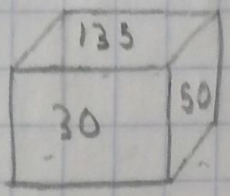
1500
135
7500
+ 4500
1350
202500

135 | 1500
150
150

30
50
1500

$(x+y)(x-y)$
$x^2 - xy + xy - y^2$

9.



$b \cdot h \cdot a = V$

$b \cdot h = 30$
$h \cdot a = 50$
$b \cdot a = 135$

$b \cdot h \cdot h \cdot a \cdot b \cdot a =$
$b^2 \cdot h^2 \cdot a^2 = 202500$
$bha = \sqrt{202500}$
$h = 1450$

18
12
56
18
236

10. $x - y = 2\sqrt{3}$
$x + y = 3\sqrt{2}$

$(x^2 - y^2)^2$

$[(x+y) - (x-y)]^2$
$[(3\sqrt{2}) - (2\sqrt{3})]^2$

$18 + 12 - 6\sqrt{6}$

$3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$
$6 \cdot \sqrt{6}$

11. $n^4 - 22n^2 + 9$

$(n^2 - 3)(n^2 - 3)$
$n^2 - 3n^2 - 3n^2 + 9$

$n^4 + 9$

$n^4 - 22n^2 + 9$
$n^4 - 6n^2 + 9$
$-16n^2$

$(n^2 - 3)^2 - (4n)^2$

$(n^2 + 4n - 3)(n^2 - 4n - 3)$

Criterios de Divisibilidad

4 | 9876432

6 = 3 · 2

Para compuestos tomas el criterio del 3 y del 2

Criterio del 7

Si por ejemplo quiero saber 7 | 1009
usas a | 1001 :v

El criterio del 8 es igual XYWZAXBC

Para el del 9 es lo mismo que el 3 (a numa) :v

Del 10 es que acabe en 0 :v

Del 11 es 11 | ABCDEF

A + C + E - B + D + F

Si eso da mult 11 o 0 pes yo

$8\overline{)896}$ 11 2 09 16

$4\overline{)96}$ 18

$4\overline{)92}$ 23 12

$8\overline{)780}$ 98 64

990

1: 12345789Z

÷3 3, 6, 9, 0

÷2 0, 2, 4, 6, 8

÷4 2, 6

5 0, 5 :v

8 6

9

11

39

39

>:v 1: 12345,78Z

÷3 3, 6, 9, 0

÷2 2, 4, 6, 8, 0

÷4 0, 4, 8

5 0, 5

8 4

9 6

11 4

Σ30

17 - (13 + Z)

2: 732128XY

90 1732128XY

9 73212840

10 732128X0

73212840

3: 5XYZ

÷2 y5 5XY0

÷11 (5 + Y) - (X) = 0 ; 11

÷9 5 + X + Y = 9 ; 18

9 4

5490

0,0

13

9 4

5, 0 2, 3

4: $\underline{W}\ \underline{X}\ \underline{Z}\ \underline{5}$

$(5+\overset{1}{X}+\ )-(\overset{4}{Z}+\overset{4}{W})=0$

Hay 4 para cuando

Hay 4+ cuando 5, 1, 2, 7, 1

4+ 5, 1, 2, 6, 2

4+ 5, 1, 2, 5, 3

Hay 4+ 5, 1, 3 8, 1 4+ 5, 2, 2

4+ 7, 2 4+

4+ 6, 3 4+

4+ 5, 4 4+

4+ 5, 0, 0 3, 2

4+ 5, 0, 0 4, 1

4+ 5, 1, 0 5, 1

4+ 4, 2

4+ 3, 3

4+ 5, 1, 4 9, 1

4+ 8, 2

4+ 7, 3

4+ 6, 4

4+ 5, 5

11055

Solo resta de 0

5,00 5 → 1·2·4
5,1,0 6 2·

1 1 1 1 5
1 0 0 0 5

1 0 0 6 5 + chico
1 0 1 7 5 2° + chico

+4

1 0 2 8 5
1 0 3 9 5

1 1 0 5 5
1 1 1 6 5
1 1 2 7 5
1 1 3 8 5 11495

5 +4

12045
12155
12265
12375

6 #

13035
13145
13255
13365

7 #

14025
14035
14045
14055

8 #

16005
16115
16225
16335

10 #

15015
15125
15235
15345

9 #

0 es multiplo de todo xd

¿Cuantos divisores tiene un número N?

$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_r^{\alpha_r}$ $\qquad (a_1+1)(a_r+1)$

$12 = 2^2 \cdot 3^1$ $\qquad (2+1)(1+1)$

$3 \cdot 2 = 6$

$mcd(12, 15) = 3$

$mcd(24, 28) = 4$

$mcd(12, 15, 24, 28) = 1$

$2^3 \cdot 3$

$2^2 \cdot 7$

$24 \times 7 = 168$

$(a+b)$ ó $(a-b)$ $\Big/ \; (a^n + b^n)$ cuando n es par

1:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots$
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdots$

$(2 \cdot 5)^{2017} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$5 \cdot 2 = 10$

$(10)^{2017} \cdot 5^3$

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
$10^4 = 10,000$

2018 digitos

2:

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
$256 \cdot 81 \cdot 25 \cdot 7$

Dos ceros

3:

Tenemos 50 divisibles entre 2
20 " 5

5^2 se presenta 4 veces
5^1 se presenta 16 veces

100	2
50	5
10	5
2	2
1	

$5^2 \cdot 2^2$

$16 + 8 = 24$

24 ceros

$(5 \cdot 2)$

4:

$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}$

T = 15 números

2 se repite 8 veces

3 4 veces

5 2 veces

7 1 vez

$\frac{n!}{(n-r)!\, r!}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

$(8+1)(4+1)(2+1)(1+1)$

$9 \quad 5 \quad 3 \quad 2$

270 divisores

5:

15 | 270 | 20

20 $2^2 \cdot 5$ 6 divisores

1, 2, 4, 5, 10, 20

20^3

$(10!)^{135}$

Tales y Pitagoras Repaso de esos mens

P1:

1.1.1:

P1: Triangulo 180 $180 \cdot (n-2)$

Cuadrado 360°

Pentagono 540°

Hexagono 720°

1.1.1

Si $\angle CAB + \angle ABC = 110$

Y eso + $\angle ACB = 180$

Entonces $\angle ACB = 70$:v

Si parte de este son 10° ($\angle ACD$) entonces la otra parte serán 60° ($\angle BCD$)

Si $CD = CB$ ∴ los angulos restantes del ΔBCD son 60°

Todos valen 60°

ΔABC tiene de ángulos 70°, 60° y "x" pero para llegar a 180° entonces $x = 50°$ → $\underline{\angle CAB = 50°}$

360 $\triangle$ 540 180 900

30

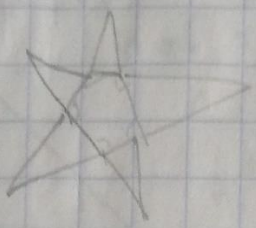
$1 + x^2 = 4$

$x^2 = 3$

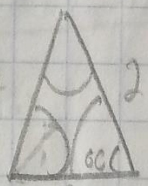
$x = \sqrt{3}$

1.1.2

540 $900 - 540 = 450$



El problema sin número :v



Cada círculo tiene de $A = \pi$

Pero está dividido :v

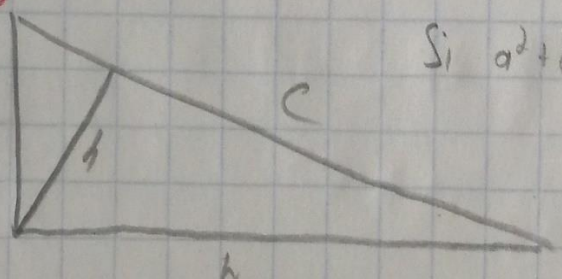
Por lo que el área que 1/círculo ocupa es de $\frac{\pi}{6}$

En total todos los círculos ocupan un total de $\frac{\pi}{2}$

El A del triangulo es $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

El área sombreada = $\frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{}$

1.80



Si $a^2 + b^2 = c^2$ será triangulo

h^2

$c^2 + 2ch + h^2$

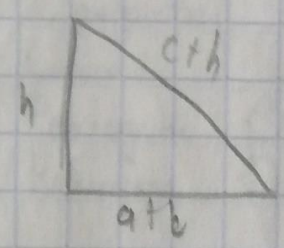
$a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow c^2 + 2ab$

$= c^2$

h es cateto
a+b tambien cu
c+h es la hip.

$h^2 + c^2 + 2ab = c^2 + 2ch + h^2$

$2ab = 2ch$



[redacted]

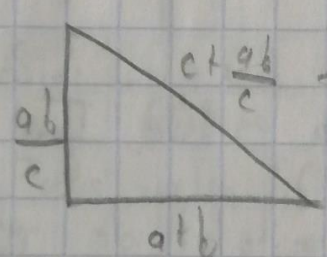
$A = \frac{c \cdot h}{2}$



$h = \frac{2A}{c}$ $\qquad A = \frac{ab}{2}$

$h = \frac{\cancel{2} \cdot \frac{ab}{\cancel{2}}}{c}$

$h = \frac{ab}{c}$



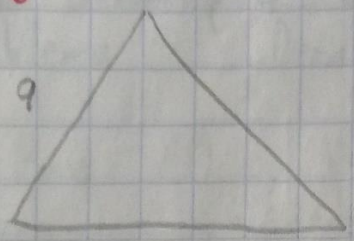
$c^2 + \cancel{2ab} + \cancel{\frac{a^2b^2}{c^2}}$

$\left(\cancel{\frac{a^2b^2}{c^2}}\right) + \left(a^2 + \cancel{2ab} + b^2\right)$

c^2

Asi se comprueba xd

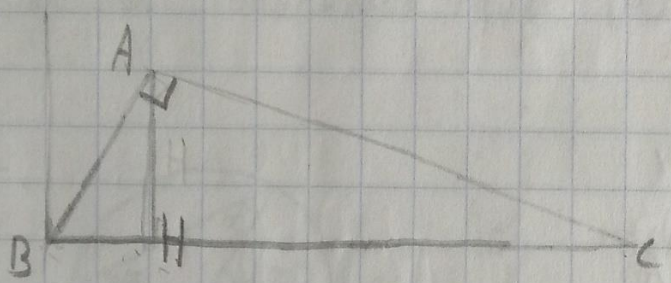
L.16



c está a la mitad ∴ c = 5

b = 7.5
d = 2.5
b+d = 10
+ 9
20
+ c
25

Otro problema sig. nombre :v



$BH \cdot HC = AH^2$

AH es semejante a HC
BH AH

$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$

Los cruzas y ya :v
$AH^2 = BH \cdot HC$

Lo mismo con el punto 2 >:v

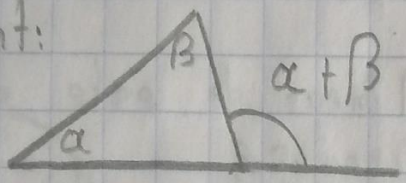
Geometría

Problema (Demostración Guiada)

1:- Pues $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ son iguales y construyen un triangulo isóceles /:- norma sisierto

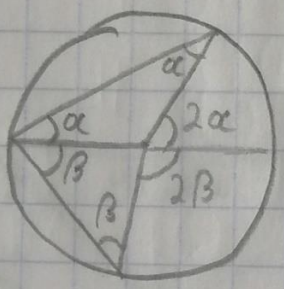
2:-

Hint:



Con eso conocemos que $DOB = 2\ DAB$

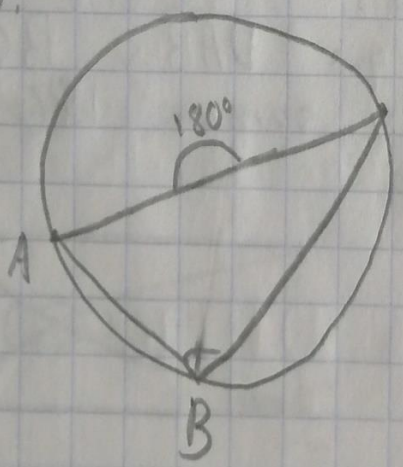
3:-



Así mero

Ejercicio:

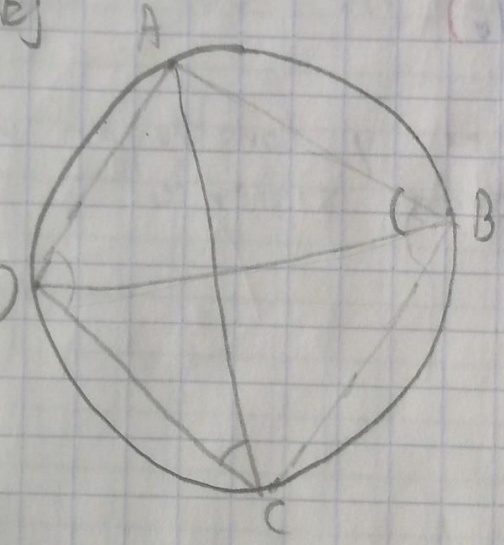
Si $AC = 2\ ABC$



Entonces $ABC = 90°$

Definición

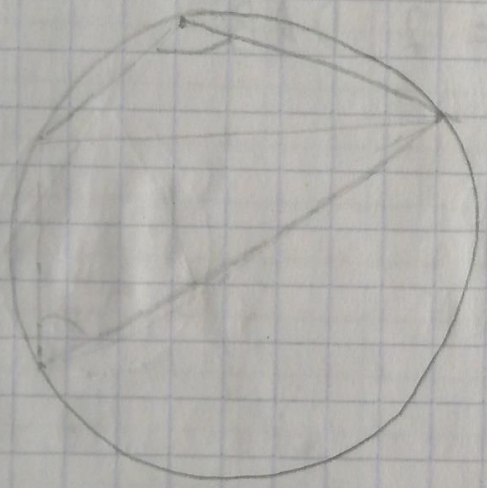
Ej



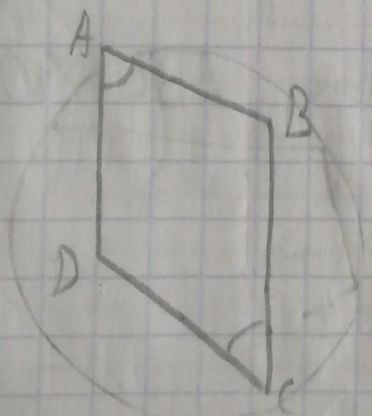
Si es cuadrado obviamente darán 180 :v

¿Que pasa cuando no lo es?

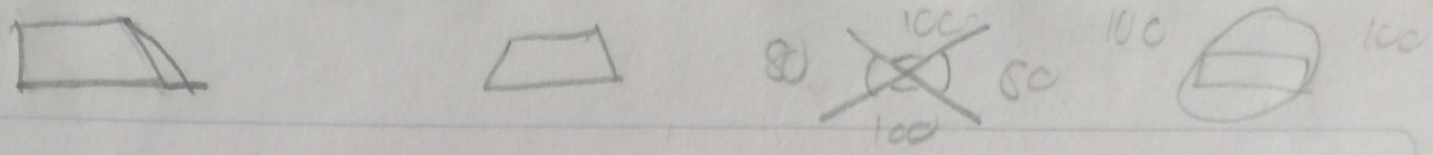
Las líneas de este seguirán moviendose



Ej



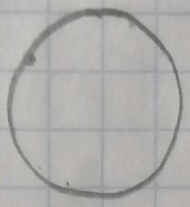
Sabemos que DAB y BCD son contrarios y suman 180 ∴ es cíclico



Problemas

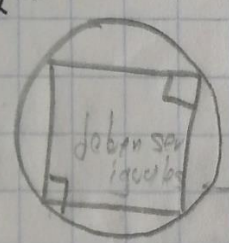
Carita de Shrek aqui

1.-



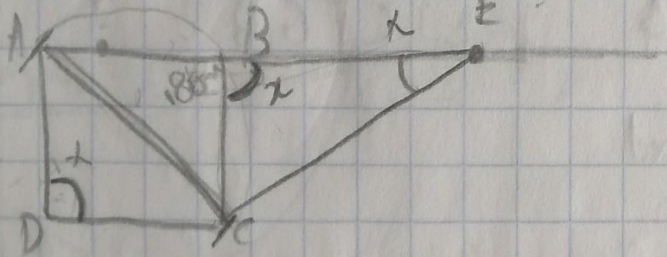
Isósceles xd

2.-



Sólo rectangulos xd
rombo y romboide nel

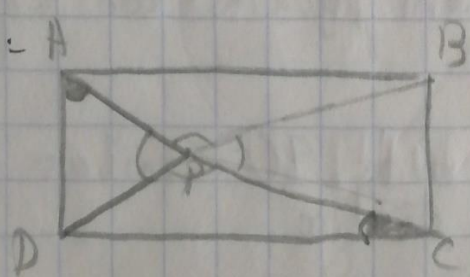
3.-



Si ABC + CDA = 180
Y ABC + CBE = 180
CBE = CDA

4.- En las hojas :v

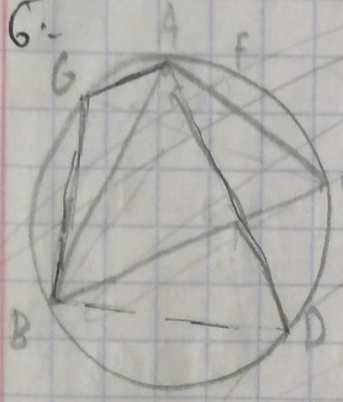
5.-



Si APD + BPC = 180
APB + DPC = 180

~~Ajuda:~~

6.-

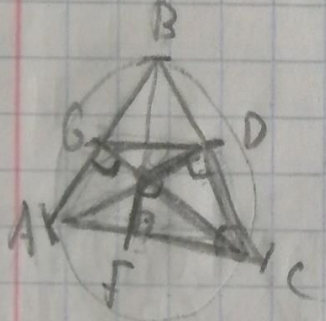


AGBD AGBF
AGBC
ABDC
ABCF

AGB D
C
F

ABD C
F

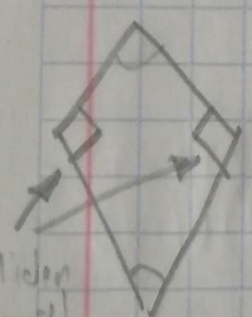
ABC F

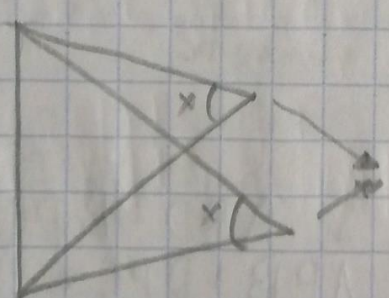


FODC
DOGB
AFOG

AGDC
BDFA
CFGB

Comprobación xd

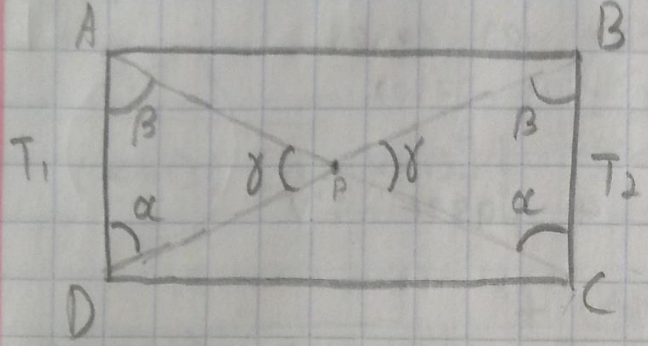




Si son iguales son cíclicos

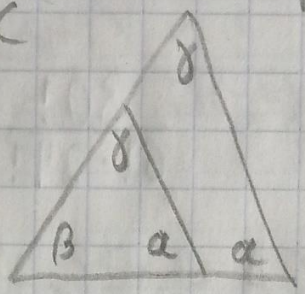
La altura mide 90° ambas y por ello es cíclico

7:

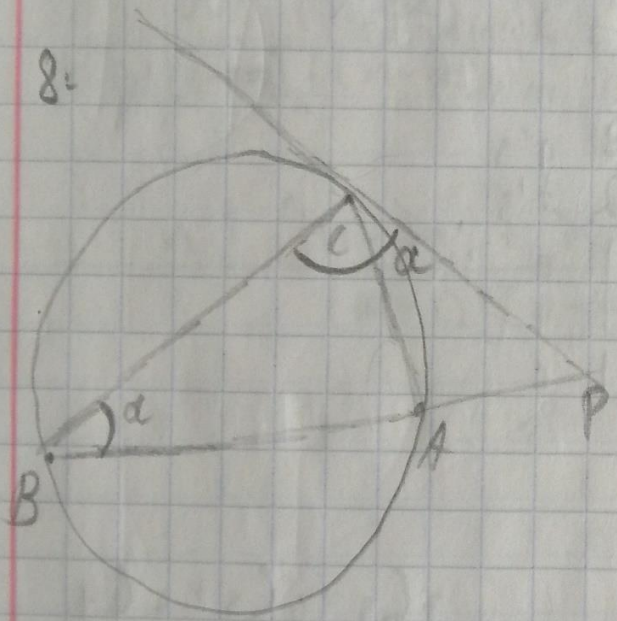


$$PA \cdot PC = PB \cdot PD$$

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}$$



8:



$$PC^2 = PA \cdot PB$$

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC}$$

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{14+15}{35}$

Combinatoria Repaso

2:- Con $\times$ se multiplican los casos
Con $+$ o se suman los casos

29 porque yo no voy a pasar :'v
Okno xd

$30C6 \qquad \frac{30!}{6! \cdot 24!}$ 30 29 28 27 26 25 24

4:- MATEMATICA 10 elementos

2 m's
3 a's
2 t's
1 e
1 i
1 c

$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$

6:- Demostrar que

$$_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_{k+1} + {}_nC_k \qquad {}_7C_5 = {}_6C_5 + {}_6C_4$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)![n+1-(k+1)]!} = \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$n+1-k-1$

$$\frac{[n!(k!(n-k)!)] + [n!(k+1)![n-(k+1)]!]}{(k+1)![n-(k+1)]!k!(n-k)!}$$

$$[n-(k+1)]k!\,n!\,[n-k+k+1] = [n-(k+1)]!\,k!\,n!\,(n+1)$$

$$= [n-(k+1)]!\,k!\,(k+1)!\,(n-k)!$$

Sigue demostrando

$$\frac{n!}{(k+1)!\,[n-(k+1)]!} + \frac{(k+1)}{(k+1)\,k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\,[n-(k+1)]!} + \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,[n-k]!\,(n-k)} + \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!\,(n-k+k+1)}{(k+1)!\,[n-k]!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n+1-1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[n+1-(k+1)]!}$$

52 elementos 13 de c/palo

1- 52C5

3- 13 · 48

5- 13C5 · 4

7- Hay 9 en c/palo ∴ son 36

9- $9 \cdot 4^5$

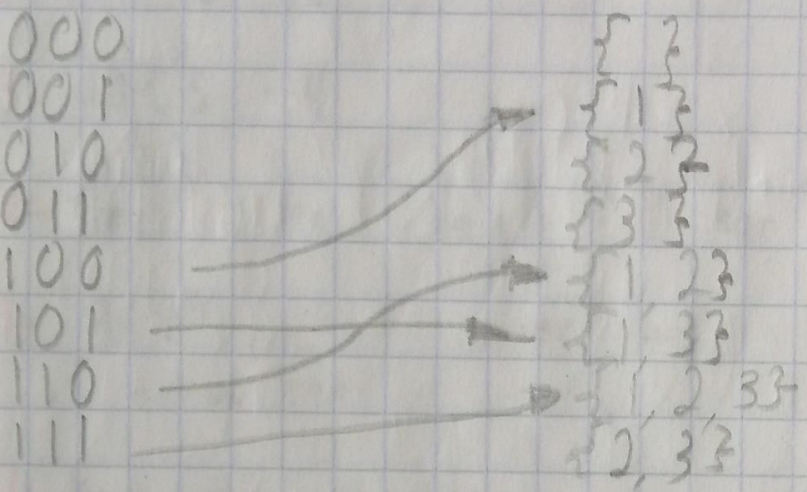
11- Para que sea tercia puede haber 4 posibilidades por cada número y si hay 13 números entonces hay 52 manos normales

Hay que descontar las pokers y Fulls

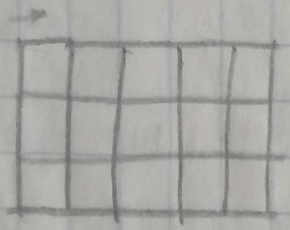
De pokers hay 13 manos
De fulls hay $4C2 \cdot 4C3 \cdot 12!$

Repaso Combinatorio
Demostración :'c

Hay una correspondencia entre:



Problemas de la Columna



← Biyección → AAADDDDD

OMG si hay

Si te vas hacia arriba escribes una A
y hacia la derecha una D

Y de cualquier forma te darán 3 A's y 5 D's

WOW

Esto es igual a $\binom{8}{3}$

Ahora con 8 renglones y 2 columnas

AAAAAAAADD 8 A's, 2 D's

$\binom{10}{9}$

Problema de los dulces

Sería 5^{20} pero esto sería si fuera una permutación, como no lo es, no se puede

Puede verse como $a+b+c+d+e=20$

Conjetura
Hay una Biyección al hacer una selección de dulces y 20 O's y 4 I's

OIOIOIIO
5 13

Y si da porque las O representan los dulces y las I's son las separaciones
Y esto es $\binom{24}{4}$ ó $\binom{24}{20}$
es lo mismo :v

Ahora con 6 tipos de dulce y 30 a comprar

$\binom{35}{5}$?

Problemas

1:

aaaaa
bcbcbcbcbc

Hay camino ↔ Selección de aristas para bajar

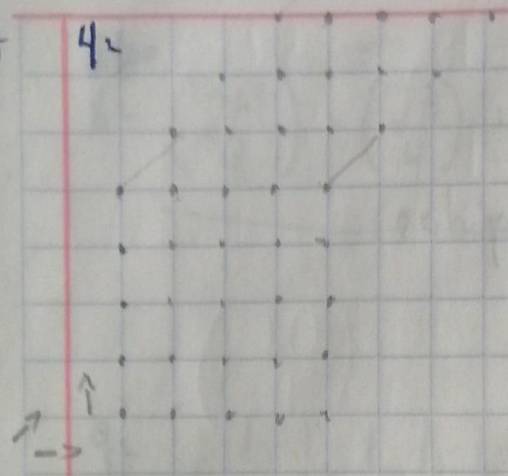
3:

Puede elegir o no elegir ninguna o todas
o así entonces esto suena a combinaciones
de subconjuntos ∴ $= 2^{20}$

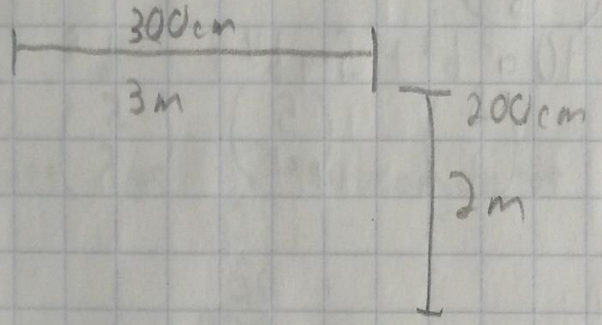
5A 5F 5D

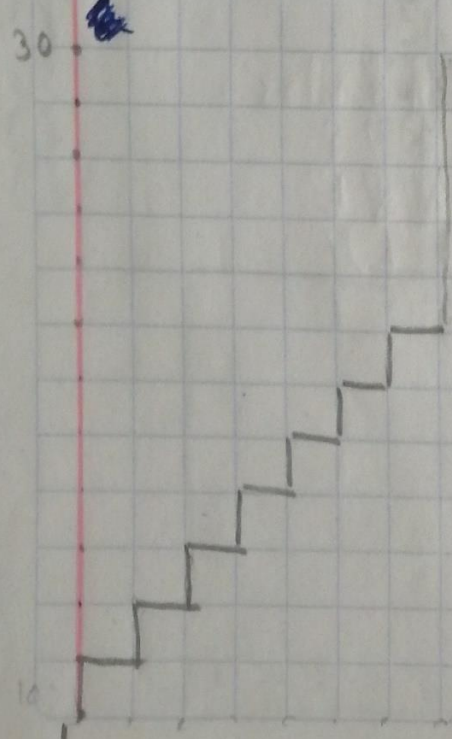
15 letras $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5}$

4:



5: 8 escalones





8 AD

30A 20D

ADADADADADADADAD

20

7- 100 helados

5 5 5 5 } 20 ya escogidos
a b c d

$\frac{5!}{3!\cdot 2}$

∴ quedan 80 más

H N H N H N H

H 80
N 3

$\binom{83}{3}$?

8- $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5\cdot ab^4 + b^5$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

9- Todos pueden ser

$\frac{8!}{8-2}$ $\binom{8}{1}$ $\frac{8!}{6!\cdot 2}$ $7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$ $8\cdot 7\cdot 6$ $\frac{8}{8}$ $\frac{8!}{4!\cdot 4}$

$\frac{8\cdot 7}{2}$ $\frac{8!}{5!\cdot 6}$ $\frac{2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}$ $\frac{}{4}$

6:- $\underbrace{\binom{24}{4}+\binom{23}{4}+\binom{22}{4}\ldots\binom{5}{4}+\binom{4}{4}}$

$\binom{25}{5}$ O_O

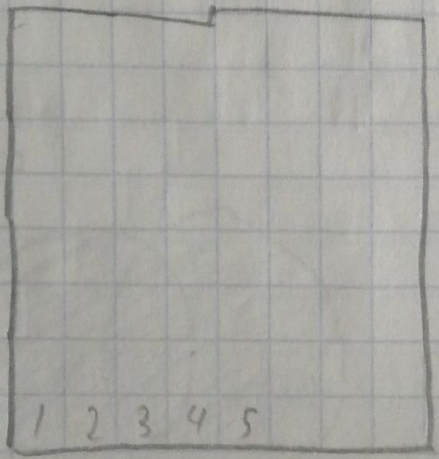
9:- 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2

{1}
{1,2}
{1,3}
{1,4}

2^8-1

- 256 subconjuntos
1
255

(8) Tienes los 8 subconjuntos con 1 elemento
28 2 elementos
56
420
56
28
8
1



¿ $\binom{15}{7}$?
Está bien pero revisar

13:

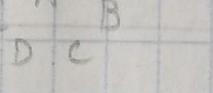
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow 5!$

+

a b c d e $\quad 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow$

Es $4!$

Si quieres hacer un ciclo de n personas: sería $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ porque



es igual

12:

$P_1 = \frac{1}{100}$

$P_2 =$

Pilmos Repaso

1:-

420	2
210	2
105	5
51	3
17	

$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$

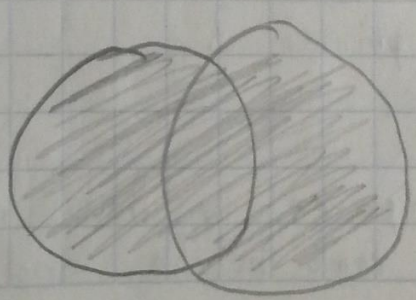
2:- Si

* 3:- 168

1	y	168
2		84
3		56
4		42
6		28
7		24
8		21
12		14

4:- mcm

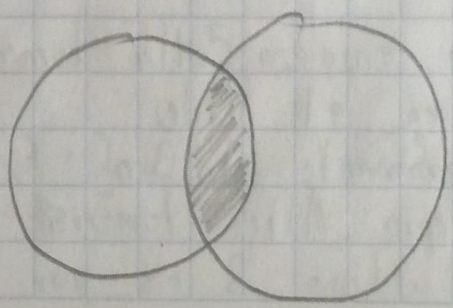
:V ∞



la verdad

mcd

1



168	2
84	2
42	2
21	3
7	7

$$\begin{array}{r} 18 \\ 35 \\ \hline 90 \\ 54 \\ \hline 630 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 630 \\ 17 \\ \hline 4410 \\ 630 \\ \hline 10710 \end{array}$$

* 5- mcm

$$168 \qquad 420$$
$$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7 \qquad 2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot17$$

$$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17 \rightarrow 10,710$$

mcd

$$168 \qquad 420$$
$$2\cdot\underline{2\cdot2\cdot3}\cdot7 \qquad \underline{2\cdot2\cdot3}\cdot5\cdot17$$

$$2\cdot2\cdot3 \rightarrow 12$$

* 6- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

$1-30 = 10$ números div $\div 3$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 11 \\ \hline 99 \end{array}$$

$1-60 = 20$
$1-90 = 30$

$1-90 = 30 + \{93, 96, 99\}$

Hay 33 números divisibles entre 3

	$3^1 = 3$	→ Los otros 22	22	3's
99 90	9 18 63 36 45 92 $3^2 = 9$	→ 8 números	16	3's
	27 54 $3^3 = 27$	→ 2 números	6	3's
	81 $3^4 = 81$	→ 1 número	4	3's
$\begin{array}{r} 27 \\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$	$3^5 = \varnothing$	:v	48	3's en total

Si Alice empieza ella tomará el primer 3
El otro men el 2do
Alice nuevamente el 3ro
Por lo que Alice tomará los impares y Bob los pares. El ultimo 3 es par (48) y como no hay más Alice pierde el juego

Propiedad: $mcm(a,b) \cdot mcd(a,b) = ab$

0_0

* 7- Si $12 \mid n$ y $18 \mid n$ entonces $36 \mid n$

Si $12 \mid n$ da entero y $18 \mid n$ también, esto quiere decir que el número tiene

$12 = 2, 2, 3$
$18 = 2, 3, 3$ $\Big\}$ $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

su mcm $36 \cdot x \cdot y$

* 8- Si $n \mid 12$ y $n \mid 18$ entonces $n \mid 6$

Si $n \mid 12$ es entero significa que n puede ser 2, 3, 4, 6 ó 12 :v
Si $n \mid 18$ es entero me sería 2, 3, 6, 9 o 18 :v
Pero de estos sólo 2 y 3 dividen a ambos
y 216 y 316

9-

x y mcd=18 ó $2 \cdot 3 \cdot 3$

$xy = 720$

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

x $2 \cdot 3 \cdot 3$
y $2 \cdot 3 \cdot 3$

$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$

$2 \cdot 5$

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

3240	2
1620	2
810	2
405	3
135	3
45	3
9	3
3	3
1	

180

18 1 2048 4096 8192 1024

10.- Si $p = q + r$ p q r son primos y uno es 2

$p = q + 2$

Si $q = 1$ $p = 3$ q no es primo
$q = 3$ $p = 5$
$q = 5$ $p = 7$
$q = 7$ $p = 9$ p no es primo
$q = 11$ $p = 13$

11.- Si $2^n - 1$ es primo n tambien

Si $n = 2$ $2^n - 1 = 3$
3 7
5 31
7 127
11 2047
13 8191

12.- n $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots p_r^{a_r}$

a) Es una combinación ?

$(a_1+1)(a_2+2) \cdot \ldots \cdot (a_r+1)$

b) n elevado a $\frac{\text{la cantidad de divisores que tiene}}{2}$

5|20 5|30
5|50

Teoría de Números

N = Naturales
Z = Enteros
Q = Racionales
R = Reales
I = Irracionales

$a|b$

Quiere decir que:

- a divide a b
- a es factor de b
- b es multiplo de a
- b es divisible por a

Ejercicio: Demuestra que $5|20$ y $6|-18$

$a|b$

$5|20 \therefore$

$ax = b$
$5x = 20$
$x = \frac{20}{5}$
$x = 4$

$6|-18$

$a|b$

$ax = b$
$6x = -18$
$x = \frac{-18}{6}$
$x = -3$

Problemas

P1 $ax = b \quad x = b/a$
$bx = a \quad x = a/b$

Prácticamente ocurre siempre pues si $a|b \therefore ax = b$ y si $b|a \therefore ax = b$

$a = \frac{b}{x}$ ó $a = b \cdot \frac{1}{x}$

Pero como hablamos de enteros entonces se cumple cuando $a = b$ porque así $a|b \rightarrow a \cdot 1 = b$ y $b|a \rightarrow a = b \cdot \frac{1}{1}$

P2 Si xd a ambas :v
P3 Tambien :v
P4 Iwal

P2 $a|b+c$ $a|b$ a $a|c$
~~A ambos~~ No → $4|3+5$ $4\nmid 3$ $4\nmid 5$
Porque quiere decir que $ax = b+c$
Imaginemos que $x = y+z$ → $a(y+z) = b+c$
y $ay = b$
y $az = c$

P3 $a|bc$ $a|b$ o $a|c$
~~Tambien a ambos~~ No
Esto quiere decir que $ax = bc$
Y si $x = ?$
$12|24$ $12\nmid 4$ $12\nmid 6$

P4 $a|b+c$ y $a|b$ ¿$a|c$?
Cy
Watcha: $a|b+c$ $ax = b+c$
$a|b$ $ax = b$

Esta si

$a|b$ NO ES IGUAL A $\frac{b}{a}$

Porque $0|0$ si hay pero $\frac{0}{0}$ es indeterminado

$\frac{a}{0}$ cuando $a \neq 0$ es indefinido

1 2 3 4 6 12 $2^2 \cdot 3$ $(2+1)(1+1) = 3 \cdot 2 = 6$

A1: G1 Encontrar a tal que $0 \mid a$

$0x = a$ no existe x pues $0 \cdot x = a$ y $a \neq 0$

A2: G2 $a \mid 0$

$ax = 0$ $a = 0$

- $4x + 6y$

  Pues porque todo número multiplicado x2 será par y $\underline{2 \cdot 2} \cdot x + \underline{2} \cdot 3 \cdot x$

- N1 abrirá todo

Todos los primos se quedarán cerrados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2^1	3^1	2^2	5^1	$2 \cdot 3$	7^1	2^3	3^2	$5^1 \cdot 2^1$

$5 \cdot 4$

$5^2 \cdot 2^2$

$(1+1)(1+1)$

$2 \cdot 2 = 4$

Despues del 51 todos pasan 1 vez únicamente

Los cuadrados quedarán abiertos

Los cuadrados tienen 3 divisores

Por los exponentes

Como $a \mid b \rightarrow ax = b$ y son parejas de a y x excepto en los cuadrados donde $a = x$ y $a^2 = b$

A3: G1 $n-2 \mid n+2$

Sabemos que $n \neq 2$

Cuando $n = 1$ $\quad n = -2$ $\quad \pm 1$

$n = 3$ $\quad n = 0$ $\quad \pm 2$

$n = 4$ $\quad \pm 4$

$n = 6$

Despues de estos la diferencia de 4 no es suficiente para que la $\div$ se cumpla

A4 G1 $\quad n = 1$ o $n = 3$

A5 G1 a | b $\quad 3x = n^2 - 2$

$3x - 2 = n^2$

$\sqrt{3x-2} = n$

$x = 6 \quad n = 16$

Ninguno lo hace :'v

Para los ultimos considerar Peault $2^{n-1} - 1$ y $2^{n-1} + 1$

Ult $3^{n-1} - 1$, 3^{n-1} y $3^{n-1} + 1$

Demostraciones

Axioma: Por dos puntos pasa una única recta

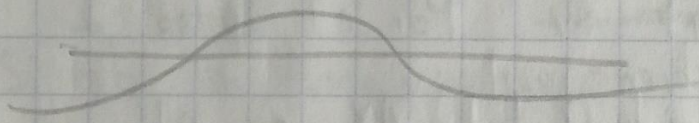
Teorema: Si dos rectas distintas se cortan, lo hacen en un mismo punto

$$(A \xrightarrow{\text{implica}} B) \xleftrightarrow{\text{si y solo si}} (\neg B \rightarrow \neg A)$$

OJO No todas las cosas se pueden demostrar con la "reducción al absurdo" o "demostrar por contradicción"

En este caso si podemos xd

Supongamos que si se cortan en + de 1 punto



$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ \hline 175 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

Pero watchemos el axioma

¿aveda?

Si multiplico por si mismo un número, la suma de sus dígitos nunca será 15

1	1		11	121	4
2	4		12	144	9
3	9		13	169	7
4	7				
5	7				
6	9				
7	13	7			
8	10	1			
9	9	9			
10					
15	9				

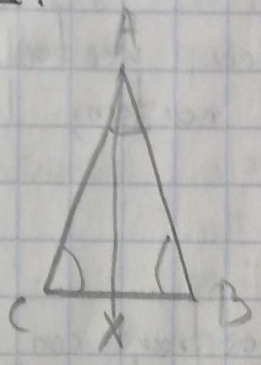
Suponemos que tenemos un número que sí suman 6 sus dígitos

Por ello debe ser múltiple de 3

∴ su raíz también, pero por esto mismo su producto debe ser multiple de 9

¿15 lo es? Wel :'v

Ej 1:



$AB = AC$

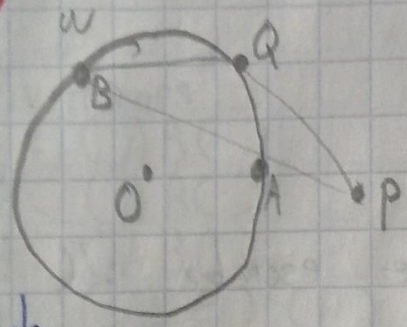
$\measuredangle CAX = \measuredangle BAX$

Demostrar que $AX \perp BC$

	Afirmaciones	Razones
1	$AB = AC$	Por hipotesis
3	$\measuredangle CAX = \measuredangle BAX$	~~Igual :v~~ Por el paso 2
2	AX es bisectriz de $\measuredangle BAC$	Tambien igual :v
4	ΔBAX y ΔCAX comparten el lado AX	Por identidad AX es el misma lado
5	$\Delta BAX \cong \Delta CAX$	Por el postulado LAL Pasos 1, 3 y 4
6	$\measuredangle AXB = \measuredangle AXC$	Paso 5 :v
7	BX y C son colineales	Paso 2
8	$\measuredangle AXB + \measuredangle AXC = 180$	Paso 7 :v
9	$\measuredangle AXB = \measuredangle AXC = 90°$	Paso 5 y 8

Lo que queria demostrar

3.

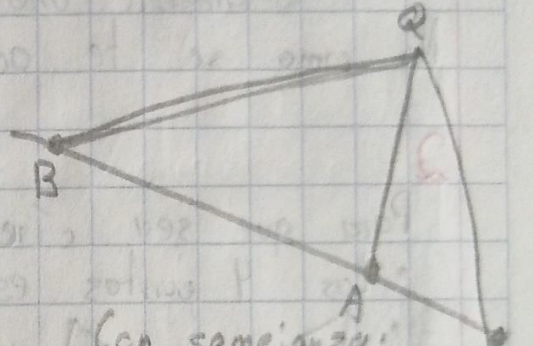


$PQ^2 = PA \cdot PB$

Si y solo si
PQ es tangente a w

De ida

Podemos hacer $\frac{PQ}{PA} = \frac{PB}{PQ}$ →



Con semejanza:
PQA
PBQ

Si esto lo toma como cierto PQ será tangente a w

Como $\measuredangle ABQ = \measuredangle AQP$ esto pasa porque $\measuredangle ABQ$ abre el arco a Q y A (y eso solo se da cuando tienes una tangente en el círculo entonces sisiento

Checando el examen

1- Redurir y especificar

"Al menos uno es par"

"Exactamente uno es par"

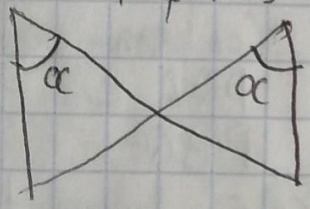
"Exactamente uno es 2"

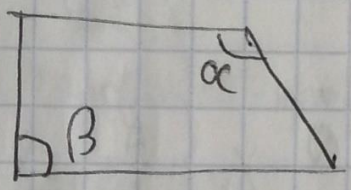
No como se te ocurre es como se escribe :'(

2:

Para que sea cíclico

- Los 4 puntos esten en un círculo





$\alpha + \beta = 180°$

Todos se cumplen

Si uno es verdad, todos lo son

Es un combo :v

3:

$A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_{30}, x$

$B = \{$ y $\}$

$x + 15 = y$

$x^2 + 555 = y^2$

Hacerlo por geometría

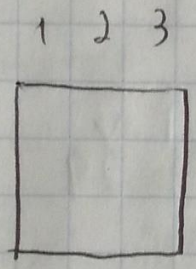
$x^2 + 555 = (x+15)^2$

4 9 6 6 · 3 · 3 · 4 · 2 · 2 · 1

Biyecciones
1 ≔ (ABC)
2 ≔ (ABC)
3 ≔ (ABC)
A ≔ ~~(ABC)~~ (1, 2 3)
B ≔ ~~(AB~~ ~~(~~ (4, 5 6)
C ≔ (7, 8, 9)

Conmutas todos

BCA	A
CAB	B
CAB	C
321	
546	
789	



6°

La normal era 9 · 6 · 6 · 4 · 3 · 3 · 2 · 2 · 1
Que sad

1 32

¿~~Cuales números~~

Encuentra todos los números con exactamente 6 divisores tales que su producto divide a 31!

1 2 3 4 5 6

12

$2^2 \cdot 3^1$

$(2+1) \cdot (1+1)$

$3 \cdot 2 = 6$

1
2
3
4
6
12

x	y
31	29

2 3
2 5
2 7

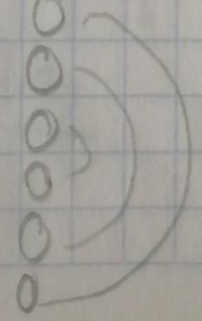
31! 30

$2^4 = 16$
$2^3 = 8$ 24
$2^2 = 4$ 12 28
20
$2^1 = 2$ 8 num

26 2's

Para obtener su producto:

Como n tiene



3^3 27
3^2 9 18
3

n^3

Factores de 2 3 5 7 11
26 14 7 4 2

Hay casos $n = p^5$ p^{15}
$n = pq^2$
p^3q^6

Pero por entonces

San 10 números

En el caso $n = p^{15}$ solo puede el 2 porque despues del 3 ya no tienen minimo 15 factores

En $n = p^3q^6$
p podria ser 2, 3, 5 o 7
q seria 2, 3 ó 5

Si n tiene k factores, el producto de sus divisores será n^k si k = par
Si es 2k+1 entonces sería $n^k \cdot \sqrt{n}$ ó $n^k \cdot n^{1/2}$
ó $n^{k+1/2}$

Aritmetica Modular

1:-

1 Enero
4 Julio

		Mod 7
Ene	30	2
Feb	28	0
Mar	31	3
Abr	30	2
May	31	3
Jun	30	2
Jul	4	4
	16	2

Mod 7 Entonces sera miercoles

2:-

Abr	17	3
May	31	3
Jun	30	2
Jul	13	6
		14

Por eso :v

3:- 1 Mod 14

Mod 14

2017 1 ¿A?

3- 1) a) $2 \equiv 10 \mod 3$ $3|\overline{10}^{3}$ 1

X

b) $16 \equiv 67 \mod 12$ 7

X

c) $20 \equiv 0 \mod 5$ 0

d) $-^{3}6 \equiv 12^{3} \mod 9$

Khe ¿Es verdadero Ah ia c pero por qué?

2) 3 mod 18

21
39
183

3) Todos los múltiples de m

Problemas

2- $a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow m \mid a - b$

3- a) $a \equiv a \pmod m$

Por el anterior:

$m \mid a-a$

$m \mid 0$ ✓

b) Si $a \equiv b \pmod m$

entonces $b \equiv a \pmod m$

Ej. $a = 31$ $\quad m \mid a-b \quad 7 \mid 28$ ✓

$b = 3$ $\quad m \mid b-a \quad 7 \mid -28$ ✓

$m = 7$

c) Si $a \equiv b$ y $b \equiv c \pmod m$ entonces

$a \equiv c \pmod m$

haciendo lo mismo

Si $m \mid a-b$ y $m \mid b-c$

entonces $m \mid a-\cancel{b}+\cancel{b}-c \rightarrow m \mid a-c$

d) Si $a \equiv b \pmod m$

$c \equiv d$

entonces $a+c \equiv b+d \pmod m$

e) Si $a \equiv b \pmod m$

$c \equiv d$ $\rightarrow$ $ac \equiv bd$

2901
7
20307
7
142149

- f) $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

4: 1

5: $\begin{array}{r} \overset{9}{60},\overset{10}{002} \\ 601 \\ \hline 59,401 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} 9900 \\ 6\overline{)59,401} \\ 5\ 4 \\ 001 \end{array}$

ó $\quad 60,002 \mod 6 = 2$

$601 \mod 6 = 1$

$2-1 = 1$

28

6: 44 cajas $\quad$ 113 latas $\quad$ grupos 12

8 $\quad$ 5

40 mod 12 → 4

Si $5 \equiv 113 \mod 12$

$8 \equiv 44 \mod 12$

$40 \equiv 220 \mod 12$

6
49
7
343
7
2401

7: $7 \equiv 7 \pmod{\cancel{99}}$ $\quad 100 \quad 7^0$

$49 \equiv 49 \pmod{\cancel{99}}$ $\quad 100 \quad 7^1$

$343 \equiv 43 \quad 100 \quad 7^2$

$2401 \equiv 1 \quad 100 \quad 7^3$

$20307 \equiv 7$

$142149 \equiv 49$

$\begin{array}{r} 3 \\ 49\overline{)343} \\ 297 \\ \hline 46 \end{array}$

$\begin{array}{r} 485 \\ 4\overline{)1942} \\ 34 \\ 22 \\ 2 \end{array}$

mod 4 → 2

49

$\frac{64}{256}$

16
16
96
16
256

8-

$7^{7^{7^{7}}}$

$7^{7^{1000}}$

7^{7000}

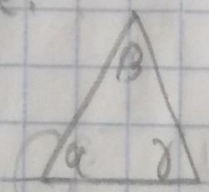
7000 mod 4

1

1	7^0
7	7^1
9	7^2
3	7^3
1	7^4
7	7^5
9	7^6
3	7^7

Intensivo I

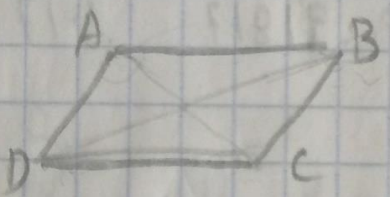
1- Sabemos que:



La suma de los angulos internos: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Pero para esto en el angulo exterior de por ejemplo: α el angulo exterior deberia ser $360° - \alpha$

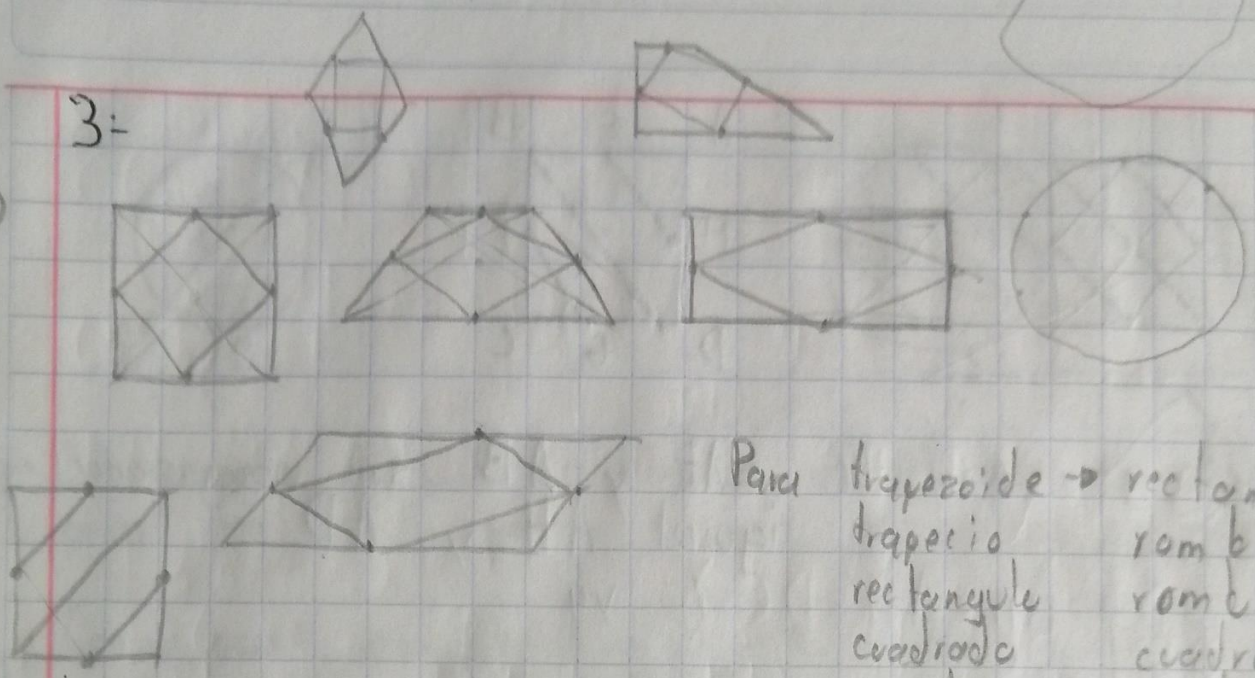
2-



Un paralelogramo es una figura de 4 lados donde 2 de sus lados son paralelos entre si y los otros 2 tambien. Esto nos lleva a afirmar que las figuras clasificadas como p.gmo son los rectangulos, rombos, romboides.

Construyendo una figura ABCD, AB || CD por ser pgmo $\therefore \sphericalangle A = \sphericalangle C$

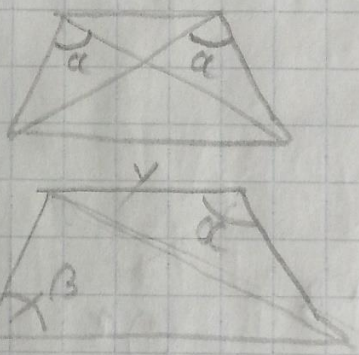
3:



Para trapezoide → rectangulo
trapecio rombo
rectangulo rombo
cuadrado cuadrado
rombo cuadrado.

4: Un trapecio isósceles

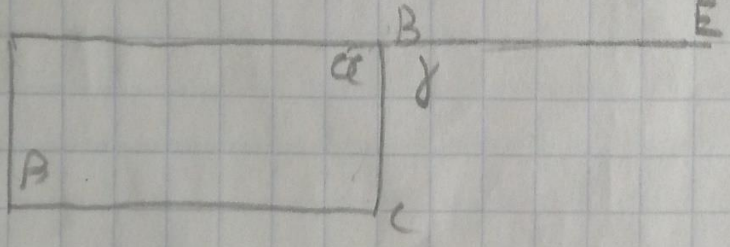
Es el unico que



$\alpha + \beta = 180$

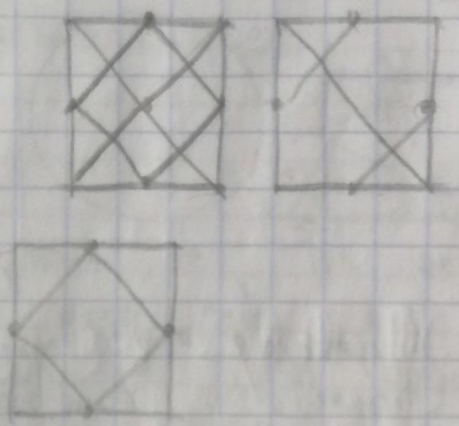
5: Un cuadrado ~~rombo~~
rectangulo ~~trapezoide~~

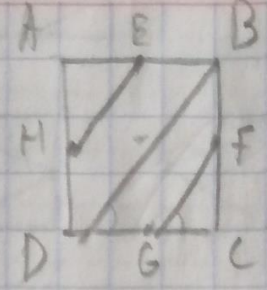
6:



Si ABCD es ciclico $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180$
Entonces $\beta = 180 - \alpha$
Si E es una extension $\alpha + \gamma = 180 \rightarrow \gamma = 180 - \alpha$

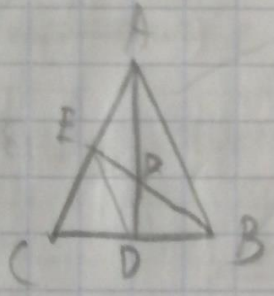
3:

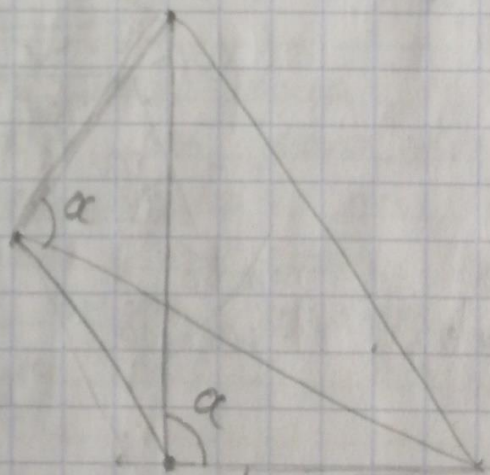




$\overline{AE}$ y $\overline{AB}$ son congruentes
igual $\overline{AH}$ y $\overline{AD}$
y y4

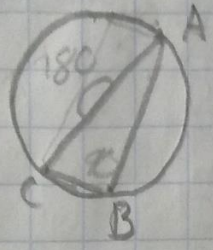
7:

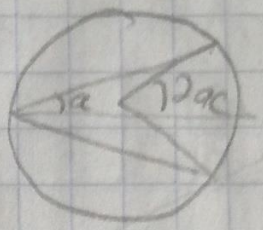




Por ello es cíclico :v

8:

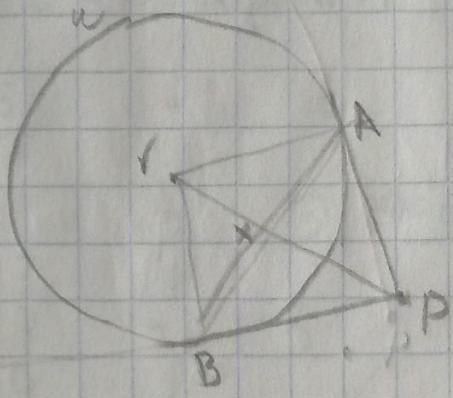




El angulo ABC mediria la mitad que el AC :v pero eso sólo pasa cuando pasa por el centro

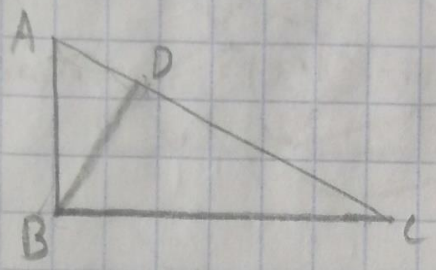
Como pasa por el centro $AC = 180$ y $AC = 2ABC$ por lo que $ABC = 90°$

9:



$\sphericalangle rAP = 90°$
$\sphericalangle rBP = 90°$
Tracemos rP
Tracemos AB
$rA = rB$ por ser radios :v
$\therefore \sphericalangle rBA = \sphericalangle rAB$
$\therefore rBx = rAx$
$\therefore Bx = Ax$ y $\sphericalangle BxP = \sphericalangle AxP$
Por lo que $BxP = AxP$
es isosceles

10.-



$BD^2 = AD \cdot DC$

$BD \cdot BD = AD \cdot DC$

$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{BD}$

BDC es semejante a ADB
Ya que D es altura $\therefore \sphericalangle ADB = 90 = \sphericalangle BDC$
$\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBA \therefore \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAB$
Por lo que su razón de semejanza

$2^2 \quad 3^2 \quad 5^2$

$3\overline{)10}$ 1

64
36
$7\overline{)256}$
46
4

Intensivo 2

1:- $3 \mid 2^{2x+1} + 1$

2	1
2	1
2	1
2	1

$10 \equiv 1 \pmod 3$
$13 \equiv 1$

$3 \mid 3$

2:- $7 \mid 4^{3x+1} + 2^{3x+1} + 1$

4	2	1
4	2	1

$7 \mid 7$

$x \equiv y^{+z} \pmod z$

3:- $p \equiv \pm 1 \mod 6$

$-z$

$p = 5$	-1	5
7	1	
11	-1	5
13	1	
17	-1	5
19	1	

Hay solución

$6k+1$
~~$6k+2$~~
~~$6k+3$~~
~~$6k+4$~~
$6k+5$
~~$6k$~~

este lo ÷ 2
3
2
2

4:- La terna más pequeña es 3, 4, 5

30	2
15	5
3	3
1	

6	8	10
9	12	15
12	16	20
15	20	25
18	24	30

2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048

5: Si $2^n + n^2$ → $6 \mid n-3$

~~n=0~~	~~1~~	✗
~~1~~	~~3~~	
2	8	✗
3	17	✓
4	32	✗
5	57	✗
6	100	✗
6=7	177	✗
6=8	320	✗
6=9	593	✓

6= $15 \mid x^2 + 3$

1	1	4
4	4	7
9	9	12
16	1	4
25	10	13
36	6	9
49	4	7
64	4	7
81	6	9
100	10	13
121	1	4
144	14	2
169	4	7
196	1	4
225	0	3
256	1	4
289	4	7

Se repite

12
15 | 185
30

14
14
56
14
196

15
15
75
15
25

$x^2 - 5y^2 = 2$

$x^2 = 2 + 5y^2$

$x^2 - 2 = 5y^2$

$5 \mid x^2 - 2$

1	1
4	4
4	1
0	1
4	4
1	0
0	

4
2
4
2
4
3

$x^2 - 7y = 3$

$x^2 - 3 = 7y$

$7 \mid x^2 - 3$

1	-2
4	1
2	-1
2	-1
4	1
1	-2
0	-3
1	-2
4	1

$7: \quad 7 \mid 4^{2n} + 2^{2n} + 1$

$16^n + 4^n + 1$

1	2	4
2	4	2
3	4	4
4		2
5		
6		
7		
8		

Intensivo 117

1. 1 +3
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31
34
37 -
40
43
46
49
52
55
58 -

9 +7
16 -
23
30
37 -
44
51
58 -

2002 n

2 no 1 si

667
3|2002
20
22
1

$21 \mid 3x-2$ $21 \mid 7y+2$

1334
+1
1335 dif 667 iguales
1336 668
?
286 iguales

3054

1998 n

6 no 1 si

285
7|1998
59
38
3

1710
+3
1713 diferentes
1718

285 iguales
286

1718 286 1718

4008
-286
3722

3436

3722

35
3
105
210

$n^2+20n+100$

$n^3+20n^2+100n+10n^2+200n+1000$

$n^3+30n^2+300n+1000$

2:- $4\cdot9\cdot16\cdot25\cdot36\cdot49\cdot64\cdot81\cdot100$

$4\cdot9\cdot25\cdot49=$

$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2$

$2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$

$(2\cdot3\cdot5\cdot7)(2\cdot3\cdot5\cdot7)\rightarrow(2\cdot3\cdot5\cdot7)^2$

3:- $n+10 \mid n^3+100$

Cuando $n=2$

$n=5$

11 | 101

12 | 108

15 | 225 ✓

13 | 127

14 | 64

$(n+10)\cdot x=n^3+100$

$(n+10)\cdot10=10n+100$

$(n+10)\cdot n=n^2+10n$

$(n+10)\cdot(n^2-10)=n^3-10n+10n^2-100$

$(n+10)\cdot(n-10)=n^2-10n+10n-100$

$(n+10)\cdot(n^2-20n+100)=n^3-20n^2+100n+10n^2-200n+1000$

$n^3-10n^2-100n+1000$

★ Recuerda:

$a \mid a$

$n+10 \mid n+10 \rightarrow n+10 \mid (n+10)^3$

$n+10 \mid n^3+$

Si $a \mid b \rightarrow a \mid bx$

Si $a \mid b$ y $a \mid c \rightarrow a \mid b+c$

Si $a \mid b$ y $b \mid c \rightarrow a \mid c$

Alb	Bern	Mx	15x
Mes	dia	24	16^
2	1	54	14y
			16y

$n+10 \mid (n+10)n^2$

n^3+10n^2

$n+10 \mid n^2+100-\cancel{n^2}-10n^2$

$n+10 \mid 10n^2-100$

$n+10 \mid (n+10)10n \rightarrow 10n^2+100n$

$n+10 \mid 100n+100$

$n+10 \mid (n+10)100$

$n+10 \mid 100n+1000$

$n+10 \mid 900$

Entonces $n=890$

4- $\frac{12n+1}{30n+2}$ $\quad 12n+1 \mid 30n+2$

$60 \mid 12n+1$ $\qquad 60 \mid 30n+2$

13 — 32

25 — 2

37 — 32

49 — 2

1

21
42
63
84

Puede ser $d \mid 12n+1 \rightarrow d \mid 60n+4$ $\qquad d \mid 1$ $\quad d=1$ $\therefore$

$d \mid 30n+2 \rightarrow d \mid 60n+5$ $\qquad 1 \mid d$

5: x, y, z, a, b, c — 79

$x \cdot ? = y$

$y \cdot ? = z$

$z \cdot ? = a$

$x+(x+x)+(3x)+4x+5x+6x$

$x+2x \ldots = 21x$

$4+8+12+16+20+24 = 84$

$3\ 6\ 9\ 12\ 18\ 21 = 69$

$1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 48 = 79$

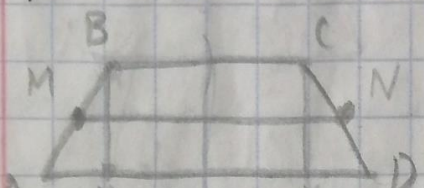
18
18
144
18
324

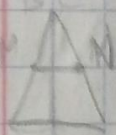
24
24
96
48
576
81
657

Intensivo 4

1:

a) BC +



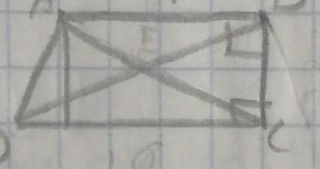


$\frac{AB}{MB} = \frac{Ax}{Mx}$

18
24 = 3
4

T semejantes

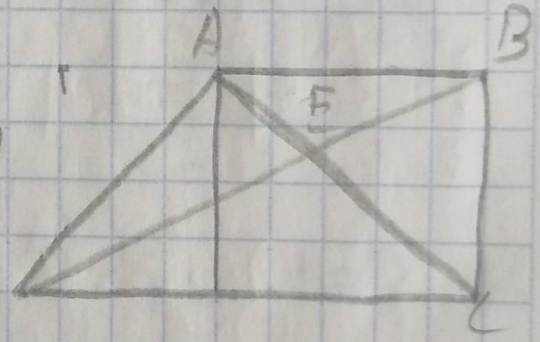
2:



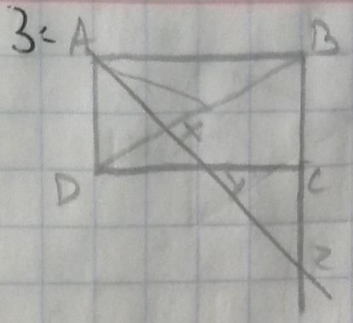
$18^2 + 24^2 = 30^2$

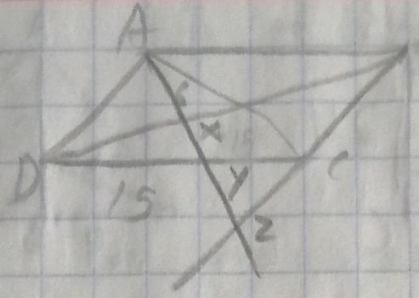
$9^2 + 24^2 =$

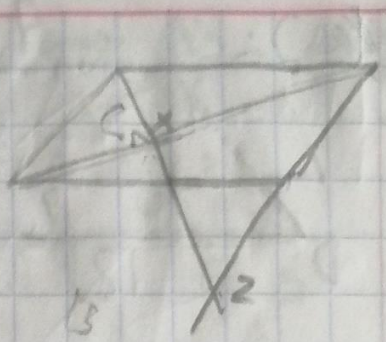
AB = 9
BC = 24
CD = 18

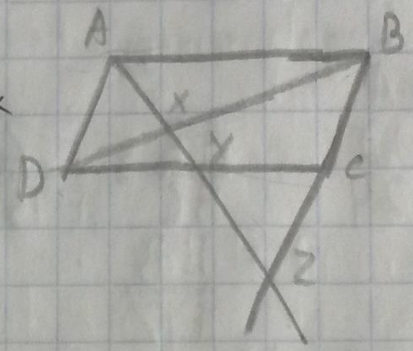


3.







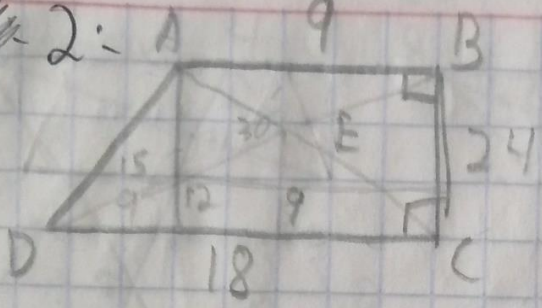


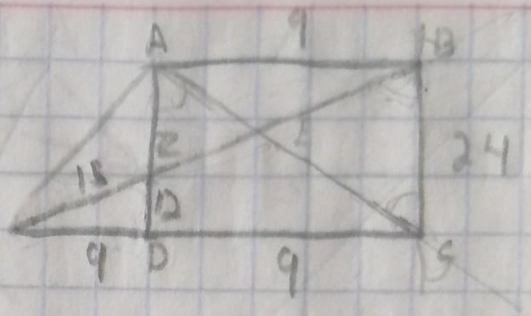
AX = 6
AZ = 15

AY = ?
XZ = 9

30 15

2:





a)

BEC es semejante a ZEA

$AZ = 12$

$BC = 24$

$\frac{AZ}{BC} = \frac{EZ}{EB}$

$2 = \frac{EB}{EZ}$

$EB + EZ = 15$

$EB = 10 \therefore ED = 20$

$EZ = 5 \quad EB = 10$

20

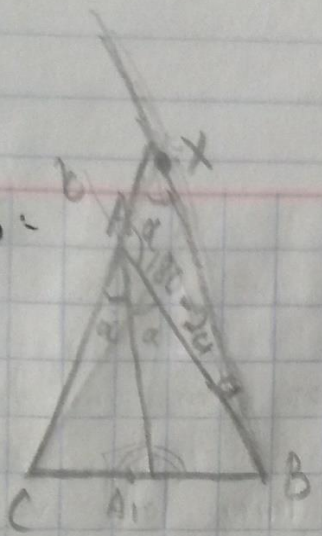
10

b) $\frac{b \cdot h}{2}$ $A = \frac{20 \cdot h}{2}$ $A = \frac{10 \cdot h}{2}$

2

A

5.-

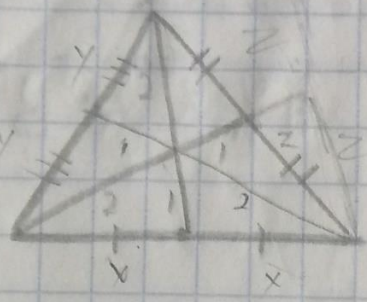


AA_1 es bisectriz $\leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C}$

BAX es isosceles

La recta de $\overline{AX}$ = B

Mediana 1:



1- a
2- b

Hay dos triangulos con un lado x, Los dos tienen un lado que compaten. ∴ El tercer lado valdrá igual. Los triangulos con lado x son iguales entre, sí
Los de lado y entre sí
Los de lado z entre sí
Si hacemos una paralela a la mediana tenemos un pequeño triangulo de lado x y otro de 2x

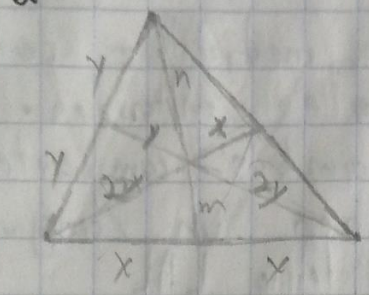
Medidas:

x	a	b
2x	2a	2b

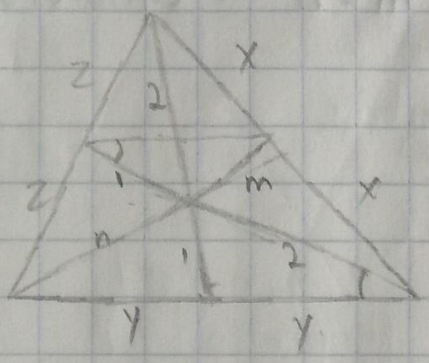
Encontramos dos pequeños triangulos con lado z

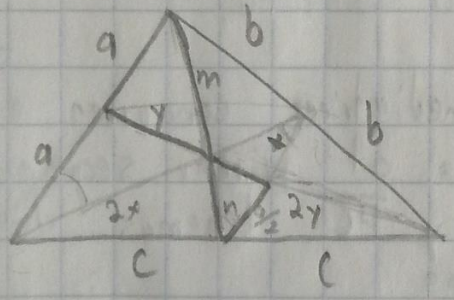
Continuará :v

2:

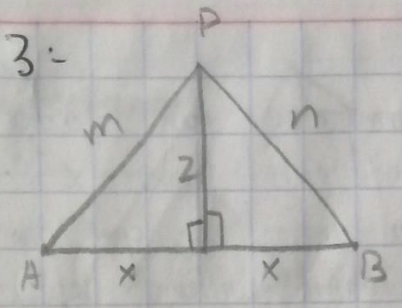


Hay dos triangulos con lado 2 y tambien con lado x. que las corta un lado que comparten
∴ ambos tienen lados x, 2, m
¿Que pasa con los del lado y?
Ambos triángulos tienen lado y uno de ellos tiene lado 2, el otro n y ambos comparten el lado 1
Hay un error ahi
Sabemos que Δ son iguales
tenemos dos triangulos:
y/2, 1, .5
y, 2, 1
y tambien aqui hay error :'(
Tenemos 2 triangulos semejantes
Tienen un angulo igual
2x
x
Por otro lado conocemos lo mismo en los otro triángulos
Tienen un angulo igual, son semejantes donde:
a, m, y → ΔD
a/2, n, y/2 → ΔE
Con esto sabemos que ΔD = 2ΔE
∴ m = 2n





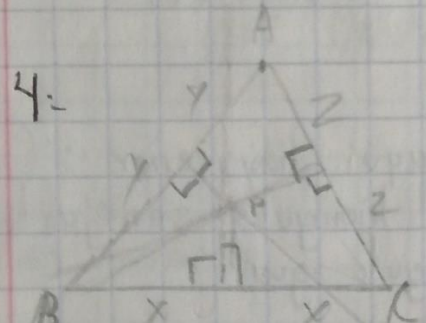
3:-



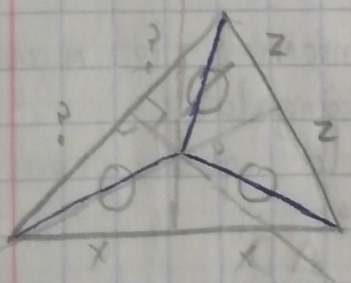
→ 1:- Sabemos que la mediatriz parte a $\overline{AB}$ en 2 iguales entonces ambos valen x, ambos comparten el lado z y tienen un angulo recto y por el criterio LAL sabemos que $m = n$ ∴ equidista a A y a B

← 2:-

4:-



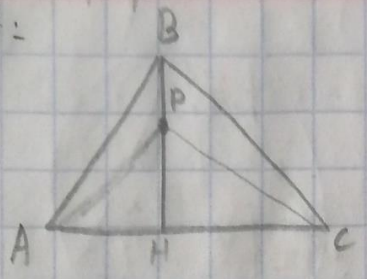
Sabemos que 2 mediatrices concurren
Son perpendiculares al primer segmento
Si trazamos $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ tenemos dos triangulos iguales
En cualquier parte, no necesariamente en P, serán iguales
Suponemos que P si es por donde pasan todas las mediatrices
Pueden constuirse 2 triangulos iguales a partir de x compartiendo el lado de la mediatriz
Puede hacerse lo mismo con y y z
y si todos comparten el vertice P entonces todas las mediatrices concurren



Ahora probamos, los triangulos x son iguales, en z igual y vemos que $\bigcirc = \oslash$ en el otro trazamos una perpendicular y con lo anterior demostramos con ALA que ? miden igual y asi

Lema de la perpendicularidad

7:



Si P esta en la altura → $AB^2 - BC^2 = AP^2 - PC^2$

Si $AB^2 - BC^2 = AP^2 - PC^2$ → P esta en la altura

→ $BH^2 = AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2$

Veamos:

$AP^2 - AH^2 = PC^2 - HC^2$

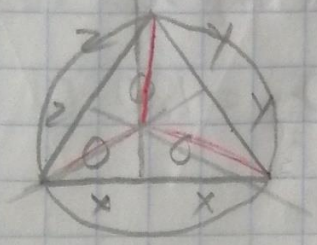
Ahora despejemos ambas

↻ $AB^2 - BC^2 = AH^2 - HC^2$

↻ $AP^2 - PC^2 = AH^2 - HC^2$

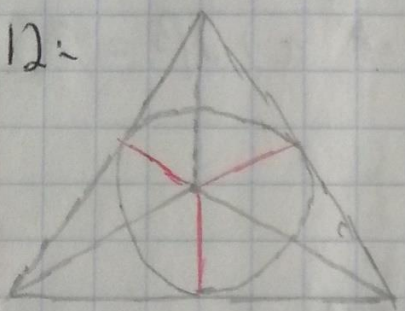
← Escogemos un punto P que al prolongarlo vea a llegar a $\overline{AB}$ como x. D sera la altura.

11:-



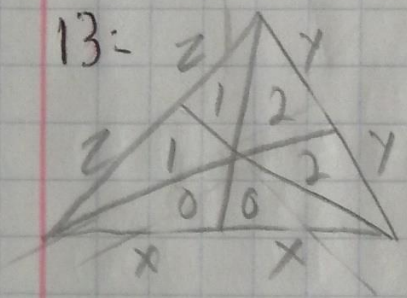
Ya que los vertices se hallan en el borde del cirulo y todas las mediatrices son iguales. Son el radio ∴ Donde concuren es el radio

12:-



Los lados rojos miden igual y como el incirculo debe trazarse dentro del triangulo, esas rayas rojas todas serán el radio y esto convierte al incentro en su centro

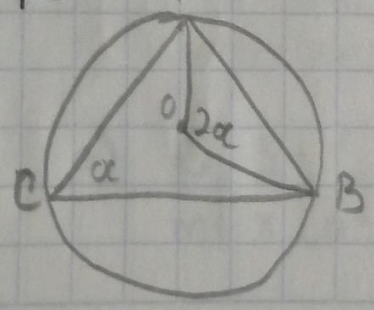
13:-



$0=0$
$1=1$
$2=2$
} Ahora hay que juntar todo xd

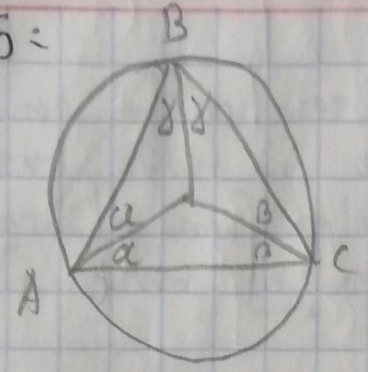
Hay un triangulo con base 2z y un lado x que es igual al de 2y y x porque comparten altura

14:-



El angulo mide el doble

15:

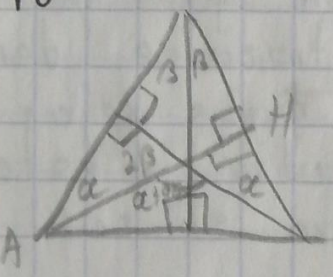


$\gamma + (2\alpha + 2\beta + 2\gamma)$

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180$

$\gamma + 90$

16:



En $AHB \rightarrow \alpha + 2\beta = 90$

$\beta = \frac{90 - \alpha}{2}$

$180 = \alpha + 2\beta + 90$

$90 - 2\beta = \alpha$

$6 \quad \frac{64}{8} \quad 2 \qquad 7 \equiv 2 \pmod 5 \qquad 2^7 \equiv 2^2 \pmod 5$

$128 \equiv 4 \pmod 5$

Intensivo 6

1.- a) No $\quad 7 \equiv 4 \pmod 5 \rightarrow 2^7 \equiv 2^4$

$128 \equiv 1 \pmod 5$

b) $3 \equiv 1 \pmod 2 \qquad 27 \equiv 1 \pmod 2$

$5 \equiv 2 \pmod 3 \qquad 125 \equiv 2 \pmod 3$

$a^x \equiv b^x \pmod m \rightarrow m \mid a^x \qquad$ Si $m \mid a \rightarrow m \mid a^x$

Y si $m \mid a$ y $m \mid b$

$m \mid a+b$

$8 \equiv 3 \pmod 5$

$512 \equiv 2 \pmod 5$

Si $m \mid a$ y $m \mid b$

$m \mid ab$

0			
1	9	4	5
2	81	16	
3	729	64	
4			
5			
...			
$m-1$			

$3^2 \equiv 2^2 \pmod 5$

$3 \cancel{\equiv} 2 \pmod 5$

Laurasud

c) $a \equiv b \pmod m$

$m \mid a-b \qquad mx \mid a-b$

$m \mid mx \rightarrow \underline{m \mid a-b}$

d) Podemos asegurar la ida con el c)

pero $\left.\begin{array}{l} m \mid a-b \\ mx \mid a-b \end{array}\right\}$ esto no

Contraejemplo $\quad 1 \equiv 3 \mod 2$

$1 \not\equiv 3 \mod 10$

e) $10 \mid 5 \cdot (7-3) \qquad 7 \cdot 5 \equiv 7 \cdot 3 \mod 10$ ✓

$m \mid x(a-b) \qquad 5 \equiv 3 \mod 10$ ✗

f) $mx \mid x(a-b)$
$m \mid a-b$

$m \mid a-b$
$mx \mid x(a-b)$

Wow !!

g) $3 \mid 75-25$
$3 \mid 35-10$ ☺

Pasa sólo en un sentido

Ejemplo 1 $4x \equiv 5 \mod 6$

$6 \mid 4x-5$

-5	1
-1	5
3	3
7	1
11	5
15	3

Ejemplo 2

$4x \equiv 6 \mod 10 \longrightarrow 2x \equiv 3 \pmod 5$

$10 \mid 4x-6$

-6	4
-2	8
2	2
6	6
10	0
14	4
18	8

$\times 3$

$6x \equiv 9 \pmod 5$

$x \equiv 4 \pmod 5$

$5k+4=x$

1000 100 $mx \mid a-b$ $6 \mid 5x-4$

202 99 $m \mid mx$ $2 \mid 5x-4$

303 98 $m \mid a-b$

404 97

101
88
13

B) $5x \equiv 4 \mod 6$

$5x \equiv 4 \mod 6$

$25x \equiv 20 \mod 6$

$x \equiv 2 \mod 6$ $\quad 6k+2$

5 4 6

$5x \equiv 4 \pmod 2$

1: $12x \equiv 8 \pmod{18}$

$6x \equiv 4 \pmod 9$ $\quad 9 \mid 6x-4$

-4	5	26	8
2	2	32	5
8	8	38	2
14	5	44	8
20	2	50	5

2: $8x \equiv 12 \pmod{18}$

$4x \equiv 6 \pmod 9$

$28x \equiv 42 \pmod 9$

$x \equiv 6 \pmod 9$ $\quad 9k+6 = x$

3: $10000x \equiv 23 \pmod{101}$

$-x \equiv 23 \pmod{101}$

~~$101k+23 = -x$~~

$10000x \equiv 230 \mod 101$

$x \equiv 78 \pmod{101}$ $\quad 101k+78 = x$

28
42
46
50
54

4- $70x \equiv 30 \pmod{85}$
$14x \equiv 6 \pmod{17}$
$154x \equiv 66 \pmod{17}$
$x \equiv 15 \mod 17$

$17k + 15 = x$

~~Problemas~~

Ejercicios

1- $x \equiv 3 \pmod 4$ $\quad x = 4k + 3$
$x \equiv 2 \pmod 5$
$4k + 3 \equiv 2 \pmod 5$
$4k \equiv -1 \pmod 5$
$4k \equiv 4 \pmod 5$
$16k \equiv 16 \pmod 5$
$k \equiv 1 \pmod 5$ $\quad k = 5q + 1$

$x = 4(5q + 1) + 3$
$x = 20q + 7$

2- $3x \equiv 5 \pmod 7$ $\quad 15x \equiv 25 \pmod 7$
$4x \equiv 6 \pmod{10}$ $\quad x \equiv 4 \pmod 7$ $\quad 7k + 4 = x$
$4(7k + 4) \equiv 6 \mod 10$
$28k + 16 \equiv 6 \mod 10$
$28k \equiv -10 \mod 10$
$28k \equiv 0 \mod 10$
$8k \equiv 0 \mod 10$
$4k \equiv 0 \mod 5$ $\quad 4k = 5q$

$7\left(\frac{5q}{4}\right) + 4 = x$

$\frac{35q}{28} + 4 = x$

~~$3\left(\frac{5q}{4}\right) \equiv 5 \pmod 7$~~

$m \mid a-b \qquad a \equiv b \mod m$

Intensivo 7

1.-

$\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \qquad \frac{a}{x} \quad \frac{x-a}{x} \rightarrow \frac{a+x-a}{x} \rightarrow \frac{x}{x} = 1$

Si dos fracciones (a/b, c/d) son irreducibles, estas ya no se puede sacar mitad o tercera pero si ambas se juntan quiere decir que se están sumando y es posible sumarlas. La única condición para efectuar una suma de fracciones es que ambas tengan mismo denominador

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \underset{x}{\text{Entero}} \qquad \frac{a}{b} = x - \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{x}{1} - \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{dx}{d} - \frac{c}{d}$

1907
951

$\frac{a}{b} = \frac{dx-c}{d}$

$\frac{ad+bc}{bd} = \underset{x}{\text{Entero}}$ $\quad ad+bc$ es divisible $\div bd \therefore bd \mid ad+bc$

$b \mid bc \qquad d \mid bc$

$b \mid ad \qquad d \mid ad$

Si son primos relativos todos pero $b \mid ad$ y $d \mid bc$ tienen que tener algún factor b y d igual en donde ambos sean iguales

2.- $3804 \mid (n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

$317 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \mid (n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

$317 \mid (n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

$12 \mid (n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

$2 \mid (n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

$0-0 \qquad 625-9$

$[n(n^2-1)]$

$[(5^2+3)^{4n+2}]$

$[(25+3)^{4n+2}]$

$\{n[(n+1)(n-1)]\}$

3804	2
1907	2
951	3
317	317

En mod 2 $5^{8n+4}+3^{4n+2}$ va a ser par porque ambos son impares elevado a x potencia so impares. Impar + impar = par

125
5
625

En mod 3. Factorizamos n^3-n. de forma $\{n[(n+1)(n-1)]\}$ donde son 3 números consecutivos, uno de ellos será multiplo de 3

mod 6 Los 2 anteriores se cumplen

mod 4 Sabemos que n^3-n SIEMPRE será par y el otro factor también y par x par = multiplo de 4

mod 12 Se cumplen mod 4 y 3 a la vez

mod 317

$5^5 = 3125$

$25 \quad 15625$

$125 \quad 78125$

$625 \quad 390625$

3:- $19 \mid 11a + 2b \iff 19 \mid 18a + 5b$

$11 \quad 8 \qquad 18 \quad 20$

$19 \mid 14 \qquad 19 \mid 38$

$19 \mid 11 + 2$		$19 \mid 18 + 5$			
11	3 4	17	10	8	17
3	14 6	16	15	7	3
14	6 8	15	1	6	8
6	8	14	6	5	13
17	10	13	11	4	18
9	12	12	16	3	4
1	14	11	2	2	9
12	16	10	7	1	14
4	18	9	12		
15	1				

$a \equiv 7 \cdot 11 + 2 \qquad 18 \cdot 18 + 5$

$77 + 14 \qquad 324 + 90$

$\text{mod } 19 \quad 1 \quad 14 \qquad \text{mod } 19 \quad 1 \quad 14$

$11a \equiv -2b \mod 19$

$a \equiv -14b \mod 19$

$18a \equiv -90b$

$18a \equiv 14b$

$18a \equiv -5b$

$18a + 5b \equiv 0$

$18a \equiv -5b \pmod{19}$

$a \equiv -14b \pmod{19}$

2:- $317 \mid 5^{8n} \qquad 3^{4n}$

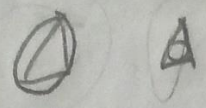
$81 \qquad 81 \qquad 162$

$30 \qquad 234 \qquad 264$

$317 \mid 5^{8n}$

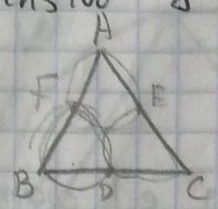
$317 \mid 5^{8n} \quad 3^{4n+2}$

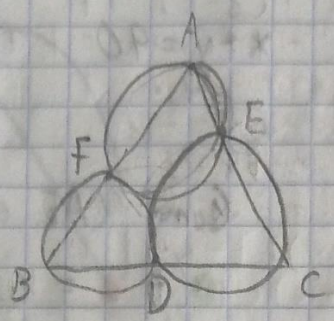
$-9 \quad +9 \quad 0$

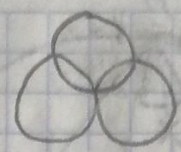


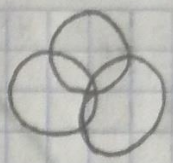
Intensivo 8

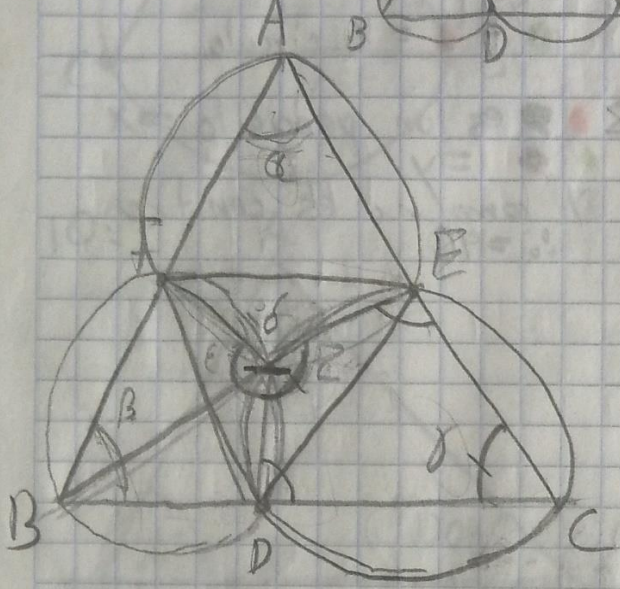
1.-











Los angulos de un triangulo = 180

$\triangle AFE = 180$

$\triangle BFD = 180°$

$\triangle DEC = 180°$

$\measuredangle BDC = 180$

El punto ½ es 360°

$\alpha + \beta + \gamma = 180$

$\delta + \varepsilon + \zeta = 360$

$\beta + \varepsilon = 180$

$\varepsilon = \alpha + \gamma$

$\zeta = \alpha + \beta$

$\delta + \alpha + \beta + \alpha + \gamma = 360$

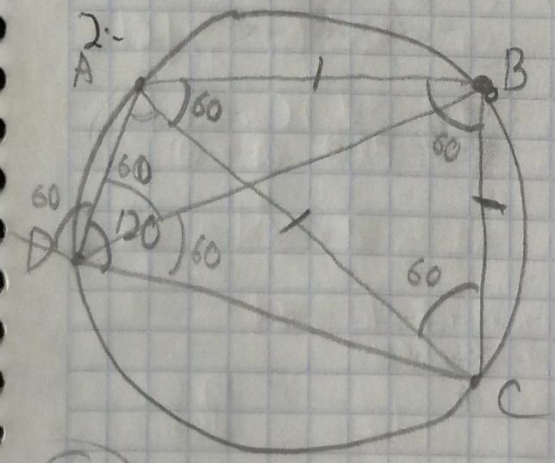
$\delta + 180 + \alpha = 360$

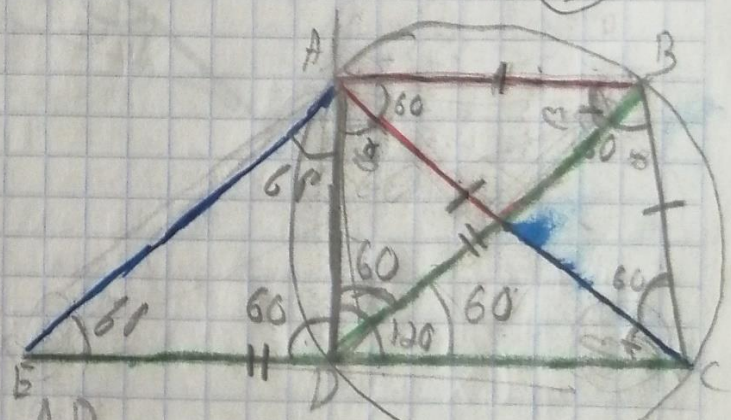
$\delta + \alpha = 180$

$\delta = 180 - \alpha$

LAL

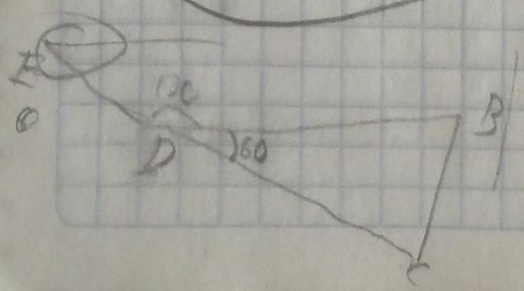
2.-





Comparten AD

$\alpha + \beta = 60$

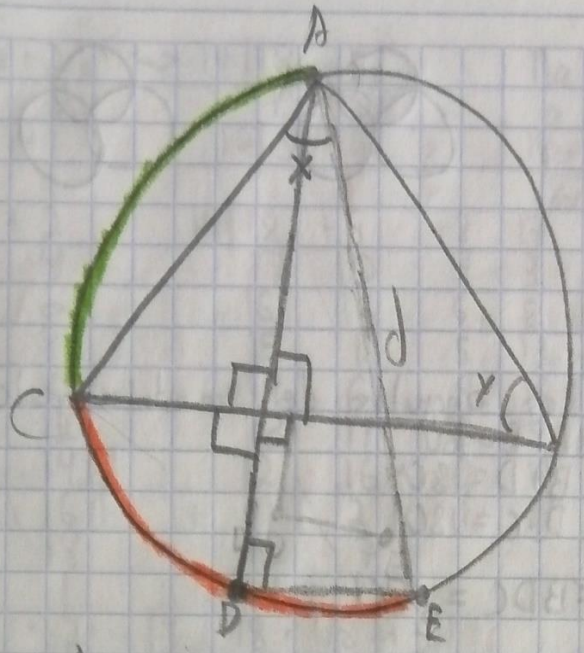


$ADB = EAC$

$120 + \beta + \alpha = 180$

$\therefore \measuredangle AED = 60°$

4-



$x + y = 90$

Como AE es el diametro

● + ● = ½ circulo

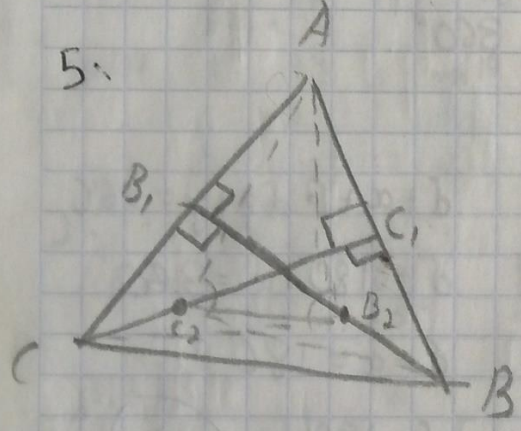
● ■ es un pedacito = x

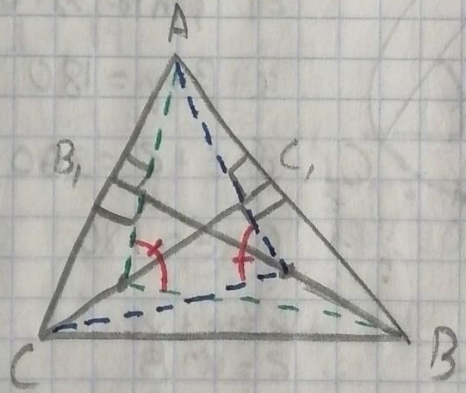
● ■ = y

y como no es centro

∴ = 90

5.

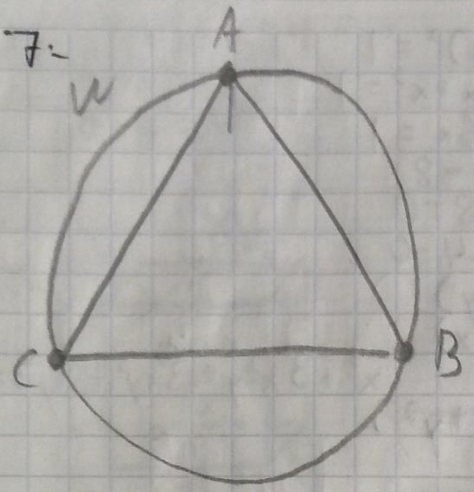




$60+2a=180$
120

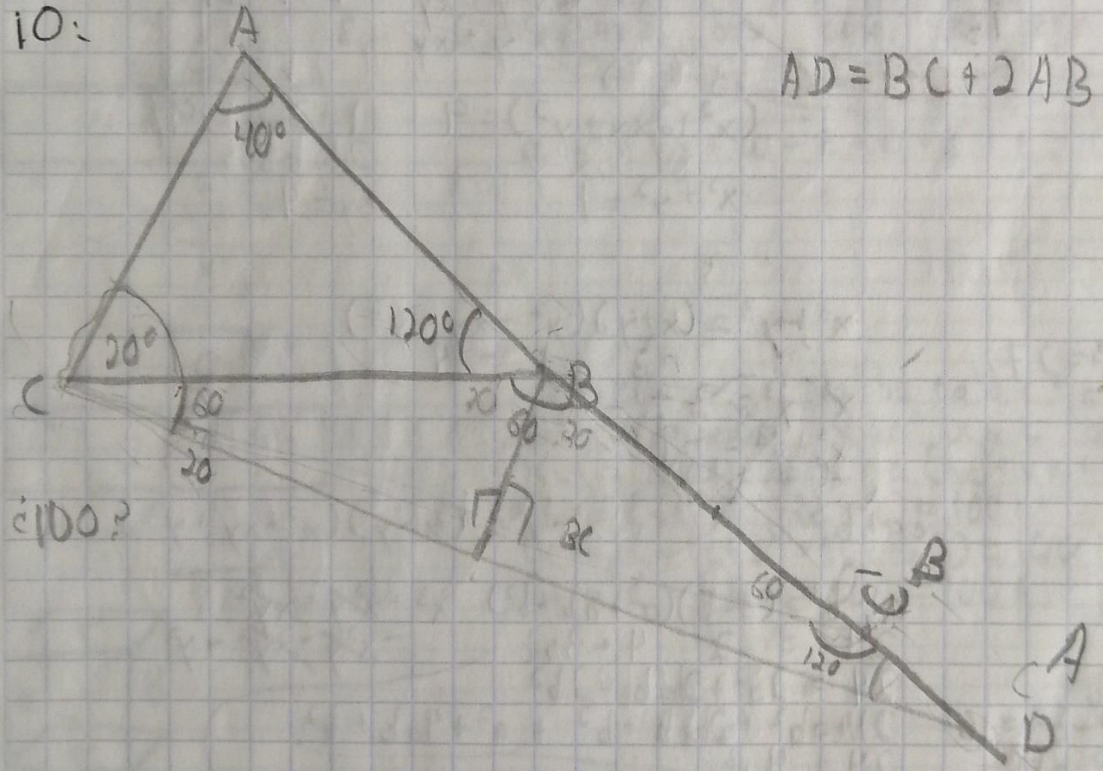
Bisec liz = ÷ al ∡ a la $\frac{1}{2}$

7:



10:

$AD = BC + 2AB$



¿100?

$x^2+2xy+y^2$

1- $x^2+y^2=1$
$x+y=3$
$(x+y)^2=9$

$y=3-x$
$x=3-y$

$x^2=1-y^2$
$y^2=1-x^2$

$x^2+(3-x)^2=1$
$x^2+9-6x+x^2=1$
$2x^2+9-6x=1$
$2x^2-6x=-8$
$2x^2-6x+8=0$
$x^2-3x+4=0$

$x^2=(1+y)(1-y)$
$x^2=(4-x)(4-x)$

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=27$

$(x+y)(x^2+2xy+y^3)$

$x^3+2x^2y+xy^2$
$x^2y+2xy^2+y^3$

$(x^2+2xy+y^2)=9$ $\quad 1+2xy=9$
$x^2+y^2=1$ $\quad 2xy=8$
$xy=4$

$x^2+y^2=1$
$x+y=3$
$x^2+2xy+y^2=9$
$x^3+3x^2y+3xy^2+3y^3=27$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$3 \quad 1 \quad -4$
$x^3+y^3=3-12$
$x^3+y^3=-9$

2- $a^3-b^3=24$
$a-b=2$
$a^2-2ab+b^2=4$
$a^3-2a^2b+ab^2$
$-a^2b+2ab^2-b^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=16$
$24-3a^2b+3ab^2=16$

$a^2+2ab+b^2$

¿a+b?

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$24 = 2 \quad 4+3ab$
$24=2a^2+2ab+2b^2$
$24=a^2-2ab+b^2+a^2+4ab+b^2$
$24=4+$
$20=a^2+4ab+b^2$
$20=(a+b)^2+2ab$
$20-2ab=(a+b)^2$

$x^3+x^2y+xy^2$
$-x^2y-xy^2-y^3$

$12+ab=(a+b)^2$

$20-2ab=12+ab$
$8=3ab$
$\frac{8}{3}=ab$ $\quad 2ab=\frac{16}{6}$

$125 \mid 5$
$25 \mid 5$
$5 \mid 5$
$1 \quad +3$

$11 \mid 143$
35

$7 \mid 1001$
30
21
142

12

$\frac{36}{3} + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}$

$11 \mid 1001$
11
91

$\frac{44}{3}$

$8 \mid 1001$
29
4
125

12

2:- $a^3 - b^3 = 24$
$a - b = 2$
$a + b = x$

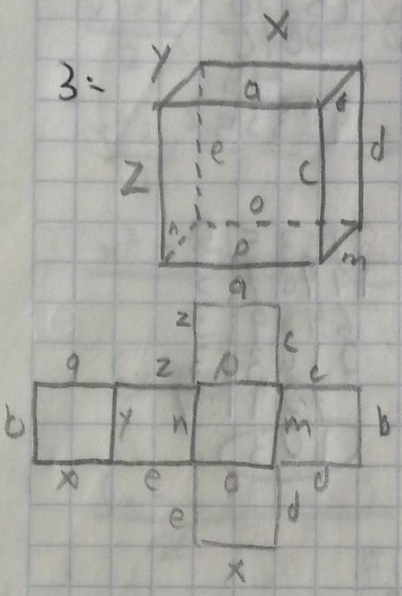
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$24 + \frac{8}{3} \qquad 2 \qquad + \frac{8}{3}$

$\sqrt{\frac{44}{3}}$

$\frac{36}{3} + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}$

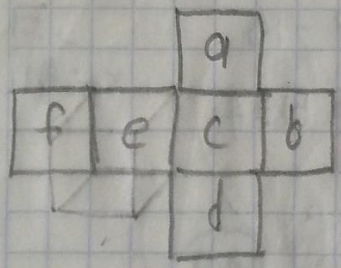
3:-



$(x, y, a, b) \rightarrow$ Superiores
$(z, e, c, d) \rightarrow$ Laterales
$(m, n, o, p) \rightarrow$ Inferiores

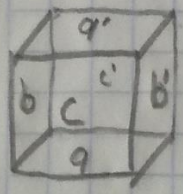
$qbc + bdx + xye + ayz + dmo + mpc + zpn + eon = 1001$
$abc \quad ayz \quad bdx \quad cmp \quad yxe \quad zpn \quad dmo$

$\alpha + \beta + \gamma + \omega + \varepsilon + \zeta + \delta + \iota = 1001$



$a'b'c' + a'bc' + a'bc + a'b'c + ab'c + ab'c' + abc' + abc$
$x \quad yz \quad xbz \quad xbc \quad xyc \quad ayc \quad +yz \quad abz \quad abc$
$x(yz + bz + bc + yc) + a(yc + yz + bz + bc)$
$(x+a)(yz + bz + bc + yc) = 1001$
$(x+a)(y(c+z) + b(c+z)) = 1001$
$(x+a)(y+b)(c+z) = 1001$
$7 \quad 11 \quad 13$

31



4:-

n	$\varphi(n)$
1 – 9	
10	30
20	30
90	100
100	200
900	

$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$

10	45
20	90
30	135
40	180
50	225
60	270
70	315
80	360
90	395
	2070

45

4000 2
2000 2
1000 2
500 2
250 2
125 5
25 5
5 5
1

200
200
000
000
40000

250
250
000
1250
500
62500

C
C

2C

D
D

517
30
487

0 — 100
100 — 199
200 — 299

3
4
5
6
7
8
9

2070
2070
4140
6210
8280
10350
12420
14490
16560
18630
0

20700
20
20
20700
82800

82800
10350
2070

95220
2070
45
97335

97335 | 5
19467 | 3
6489 | 3
2163 | 3
721 | 7
103

14
14

95220 | 2
10

4771 2 2

103

5: $m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517$

$m^2 + 3m^2n^2 - 30n^2 = 517$
$3m^2n^2 + m^2 - 30n^2 = 517$
$3m^2n^2 + m^2 - 30n^2 - 10 = 517 - 10$
$=$
$m^2(3n^2+1) - 10(3n^2+1) = 507$
$(m^2-10)(3n^2+1) = 507$
$(m^2-10)(3n^2+1) = 13^2 \cdot 3$
169 13

$m = 7$
$n = 2$

$3m^2n^2 = 588$

13
3
39

169
3 | 507
20
27
13
13 | 169

3
13
13

3
49 4
21
196
588

$x^2 + 2xy + y^2 \quad \therefore (x+y)^2 - 2xy$

6.- $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy \quad \frac{(x+y)^2 - 2xy}{2} \geq xy \quad \frac{(x+y)^2}{2} - \frac{2xy}{2} \geq xy$

$\frac{x^2}{2} + \frac{2xy}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{2xy}{2} \geq xy$

$\frac{x^2+y^2}{2} - xy \geq 0$

$\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{2xy}{2} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2+2xy+y^2-2xy}{2} - \frac{2xy}{2}$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$
Pues siempre acurre

$\frac{x^2-2xy+y^2}{2} \geq 0$

$\frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$

$\frac{(x-y)(x-y)}{2} \geq 0$

$\frac{x^2+y^2}{2} - xy \geq 0$
Esta es mayor

7.-

10.- x $\quad 9^x = a \quad \frac{1}{9^x} = \frac{1}{a} \quad 12^x = b \quad 16^x = a+b \quad 16^x = 9^x + 12^x \quad \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}$

$\frac{12^x}{9^x} \quad \left(\frac{12}{9}\right)^x \quad \left(\frac{4}{3}\right)^x$

2
4
60

$$\begin{array}{r} 166 \\ 3\overline{)500} \\ 20 \\ 20 \end{array}$$

7
67
49
7
343
7
2901

3
6
9
12
15

$$\begin{array}{r} 100 \\ 5\overline{)500} \end{array}$$

1:
10 Palabras
2 M
3 A
2 T

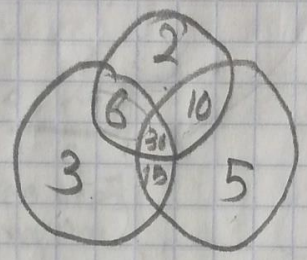
$$\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$$

2: 999 995 1000

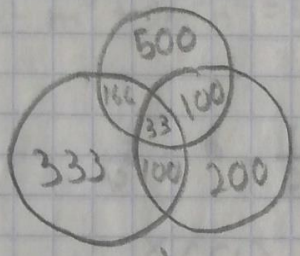
165 primo

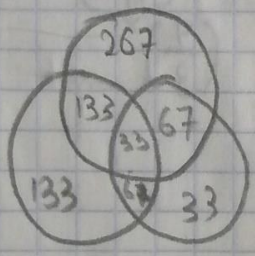
7^3

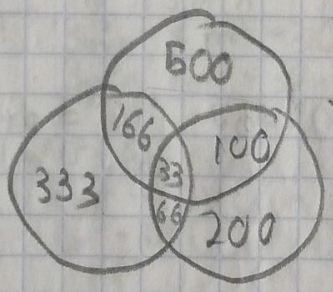
500 mult 2
333 3
200 5



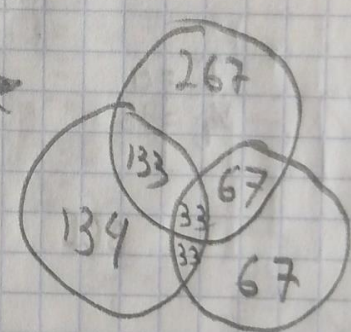
1
66
67
133







mullt 10 100



2123
333
199
134

166
67
233

49 10
500
233
267

15
18

33
267
134
133
67
67
66
734

9 10
1000
734
366

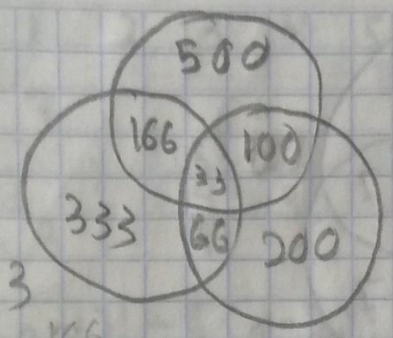
200
167
33

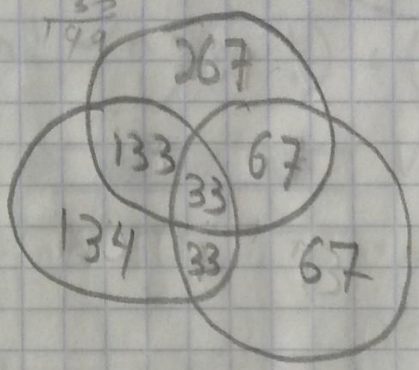
133
67
200

333
200
133

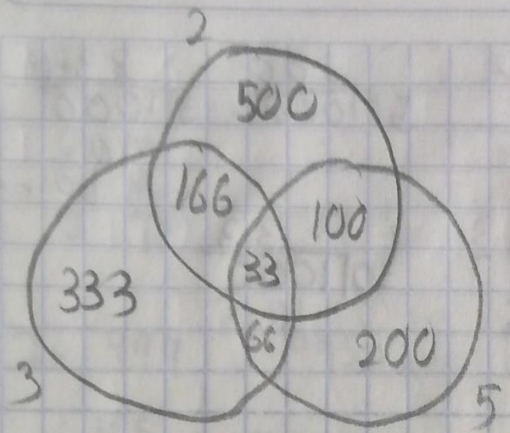
33
267
67
33
133
33
67
133
733

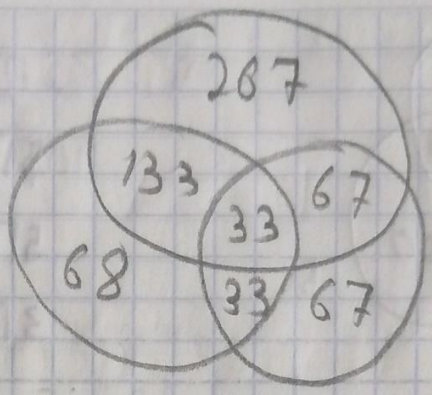
100
733
367
165
202





$\left(\frac{x+3+1}{x}\right)^4$ $\left(\frac{x+4}{x}\right)^4$ $\left(\frac{5}{4}\right)^4$ $\left(\frac{6}{5}\right)^4$ $\left(\frac{7}{6}\right)^4$





668

2	500
3	333
5	200
6	166
10	100
15	66
30	33

6 — 6 5 +4 −3 +2 −1

12 3 4 5

4:- 1 2 3 4 5 6 7

7 6!

5 y 2 5! · 2

4 y 3 4! · 3!

2, 2 y 3 4!

5 — 2

4 — 3

7

6 — 1

3 — 4

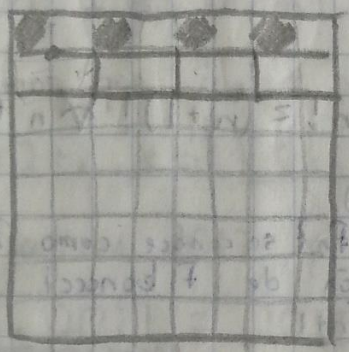
2 — 5

1 — 6

5:- $(n-1)! + [(n-2)! \cdot 2] + [(n-3)! \cdot 2]$

$n! - \binom{n}{1}(n-1!) + \binom{n}{2}(n-2!) - \dots \binom{n}{n-2} 2! - \binom{n}{n} 1$

8:-



$2! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ 2^4

$2^{28} \rightarrow 2^{36}$

Inducción

1.- Demostrar que:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.- Demostrar que:

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.- Demostrar que: $6 \mid 7^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4.- Demostrar que $n! > 3^{n-2} \quad \forall n \geq 2 \in \mathbb{N}$

5.- Demostrar que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! \dots n \cdot n! = (n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6.- Sea $F_0 = F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} = F_n \quad \forall n \geq 0$
Demostrar que $f_n \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Nota: $\{F_n\}$ se conoce como la sucesión de Fibonacci

7.- Demostrar que $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

8.- Demostrar que $(3n)! > 2^{6n-4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

9.- Demostrar que $8 \mid n^2 - 1 \quad \forall n$ impar $\in \mathbb{N}$

10.- A y B juegan un juego que consiste en que:
- Al inicio hay n piedras sobre una mesa
- A y B se turnan para tomar 1, 2 o 3 piedras de la mesa
- Pierde quien tome la ultima piedra
- A inicia a jugar

Si inicialmente hay 2017 piedras, demuestra que B puede asegurar ganar el juego

11.- Demostrar que: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

12.- Demostrar que si un numero es multiplo de 9, entonces la suma de sus cifras es multiplo de 9

13.- Prueba que cualquier cuadrado puede recortarse en n cuadrados no necesariamente iguales sin que sobre espacio ~~para~~ $\forall n \geq 6$

14.- Una rana

Principio de induccion

1- Se comple para el 1

2- Si se comple para k, tambien lo hará para k+1

3- Concluir que se comple para todos los números

ej 1: $1 = \frac{(1)(1+1)}{2}$

$1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$

Para el 1 si comple (Base de inducción)

Suponemos que con k va a ocurrir (Hipotesis de Inducción)

$1+2+\dots k = \frac{k(k+1)}{2}$

Ejemplo con 2017 y 2018

$1+2+\dots 2017 = \frac{2017(2018)}{2}$ ← Supongamos que esto es cierto

$1+2+\dots 2017+2018 = \frac{2018(2019)}{2}$ ← ¿Como decimos que este es cierto?

$1+2+3+4 = \frac{4(5)}{2} = 10$

$1+2+3 = \frac{3(4)}{2} = 6$

Podemos hacer:

$\frac{2017(2018)}{2} + 2018$

$\left(\frac{2017}{2}+1\right)2018$

$\left(\frac{2019}{2}\right)2018$

$\frac{2018(2019)}{2}$ También es cierto

¿Y para k y $k+1$?

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

$$\left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1)$$

$$\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{2}\right)(k+1)$$

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)(k+1)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ Listo

Importante checar la base y la hipotesis

Base: Cumple para el 1
Hipotesis: Si cumple para k tambien $k+1$

4 Demostrar que $n! > 3^{n-2}$

Empezamos a probar con la base (esta vez será 2)

$2! > 3^{n-2}$? $n=2$

$2 > 1$ ✓

La base si cumple

Ahora probamos con la hipotesis

$k! > 3^{k-2}$ ✓

$k+1! > 3^{k-1}$?

$(k+1)! = k!(k+1)$

$(k+1)(k)! > (k+1)3^{k-2}$

$(k+1)! > 3k-1$

$k+1$ es al menos 3 si k es al menos 2 entonces: $3 \cdot 3^{k-2} = 3^{k-1}$

Y por el principio de induccion decimos que cumple para todos

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Base 1 $\quad \frac{1(2)(3)}{6}=1$ ✓

2 $\quad \frac{2(3)(5)}{6}=5$ ✓

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ✓

$\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$ $\quad \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$?

$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=(k+1)^2+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$\frac{(k+1)[2k^2+3k+4k+6]}{6}=k+1\left((k+1)+\left(\frac{k(1)(2k+1)}{6}\right)\right)$

$k+1\left(\frac{6k+6}{6}+\frac{k(1)(2k+1)}{6}\right)$

$\left(\frac{6k+6}{6} \quad \frac{2k^2+k}{6}\right)$

$k+1\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$

$\frac{(k+1)[2k^2+3k+4k+6]}{6}=k+1\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$ ✓

3: $6 \mid 7^n - 1$

Base 1 $6 \mid 7^1 - 1$ — $6 \mid 6$ ✓

Base 2 $6 \mid 7^2 - 1$ — $6 \mid 48$ ✓

Hipótesis: $6 \mid 7^k - 1$ ✓

$6 \mid 7^{k+1} - 1$?

$6 \mid 7^k - 1$

$6 \mid (7^k - 1) \cdot 7 = 6 \mid 7^{k+1} - 1$

$6 \mid 7^{k+k} - 7 + 6$

$6 \mid 7^{k+1} - 1$

$-7 \equiv -1 \pmod 6$

También se puede

$6 \mid 7^{k+1} - 7 + 6$ ← $6 \mid 6$ ✓

$6 \mid 7^{k+1} - 1$

5: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! \ldots n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Base 1 $1 \cdot 1! = 1$ $(1+1)! - 1 = 1$ ✓

Base 2 5 $(2+1)! - 1 = 5$ ✓

$(k+1)! - 1$ ✓

$[(k+1)+1]! - 1$?

$(k+2)! - 1$

$(n-1)! \cdot n^2$

$(k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$

$(k+1)! - 1 + k! \cdot (k+1)^2$

$(k+1)k! - 1$

$(k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$(k+1)! - 1 + k! \cdot k^2 + 2k + 1$

9: $8 \mid n^2 - 1$

1	0
3	8
5	24
7	48

n impar

$8 \mid n^2 - 1$

$8 \mid (n+2)^2 - 1$

$8 \mid n^2 + 4n + 4 - 1$

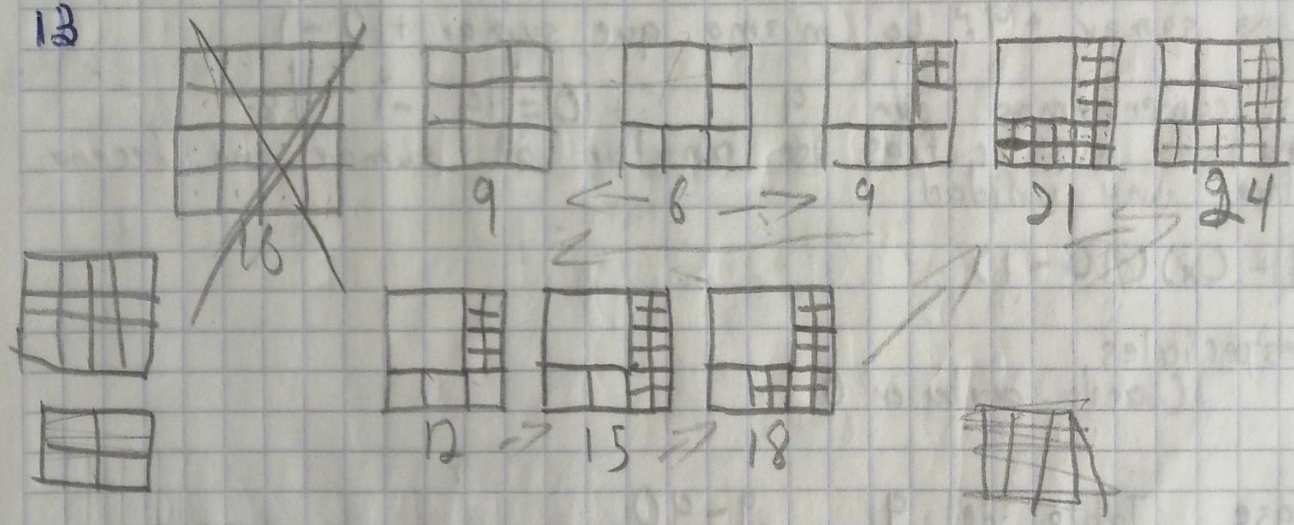
$8 \mid n^2 + 4n + 3$

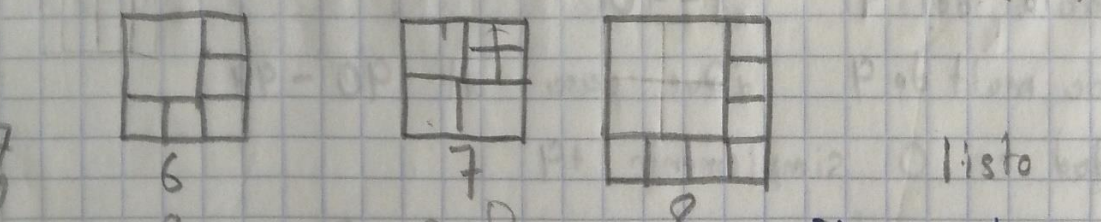
$1 \quad 4 \quad 3 \pmod 8$

$n^2 - 1$

$n+1 \quad n-1$

13





7 8 9 10

6 9 12 15 18 21 24

7 0 10 13 16 19 22 25

8 11 14 17 20 23 26

Listo

El caso base $n = 6, 7, 8$
Hipótesis k
Conclusión, sí se puede con k
también con $k+3$

Q.G

12

9
18
27
36
45 ... 99
108
117
126 ... 198
207
216
225 ... 297

x+9 Si x= A0 → ~~A0~~ A9
Si x= A1 → B0

¿Que es sumar +9? Lo mismo que sumar +10 -1

Entonces comenzamos con 9 +10 = 19 -1 18
La suma de sus cifras se anulan al sumar una decena y restar una unidad

9 + (x)(10 - 1)

Casos especiales
Cuando acaba en 0

Caso base Tabla del 9 9-90

Hipotesis Todo mult de 9 ¿Que pasa al 90 - 99

Cuando la unidad es 0 simplemente +9

¿Y 99 - 108? Incrementa la d. 9 se hace 0

n^2+2n+1

$n+1$

n^3+ $\quad k+1$ $\quad n^3+$

Combinatoria - Induccion

1- a) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Base 1: $\frac{1(2)(3)}{6}=1$ ✓

Base 2: $\frac{2(3)(5)}{6}=5$ ✓

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ✓ $\quad \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$?

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$ $\quad$ ~~$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+k^2+2k+1=$~~

$(k+1)\left(\frac{k(1)(2k+1)}{6}+(k+1)\right)=\dots$

$(k+1)\left(\frac{2k^2+k}{6}+\frac{6k+6}{6}\right)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\rightarrow\frac{(k+1)(2k^2+3k+4k+6}{6}$

$(k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$ ✓

b) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$

Usar Form. Gauss: $\frac{n(n+1)}{2}$

Base 1: $1^3=1^2$ ✓

" 2: $1^3+2^3=(1+2)^2 \quad 9=9$ ✓

" 3: $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2 \quad 36=36$ ✓

k k

$f_4 = f_2 + f_1 + f_2 \quad 2f_2 + f_1$

$f_3 = f_2 + f_1$

$f_1 + f_2 + f_1 + f_2$

3

$f_5 = 2f_2 + f_1 + f_2 + f_1$

$3f_2 + 2f_1$

f4

$f_6 = 3f_2 + 2f_1 + 2f_2 + f_1$

$f_6 = 5f_2 + 3f_1$

c) $f_1 + f_2 + f_3 + \dots f_n = f_{n+2} - 1$

1 1 2 3 5 8 13 21 34

$1 = 1$ ✓

$2 = 2$ ✓

k $\quad f_{k+2} - 1$

k+1 $\quad f_{(k+1)+2} - 1 \quad \rightarrow (f_{k+2} - 1) + (k+1)$

$f_{k+3} - 1$

Pero $f_{k+3} = (f_{k+2} + f_{k+1}) - 1$

$\rightarrow (f_{k+2} + f_{k+1}) - 1$

$f_{k+2} - 1$ (Esto es de k) $\quad + f_{k+1}$ (Eso le sumamos O_O)

d)

2: $a_0 = 1$ $\quad a_1 = 2(a_0) + 1$ $\quad a_1 = 3$

$3 = 2 + 1$

$a_2 = 2(a_1)$

$a_0 = 1$
$1 = 3$
$2 = 7$
$3 = 15$
$4 = 31$
$5 = 63$

Conjetura → $a_n = 2^{n+1} - 1$

$a_{n+1} = 2^{n+2} - 1$

$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \cdot 2 + 1$

$2^{n+2} - 2 + 1$

$2^{n+2} - 1$

$a_{2017} = \boxed{2^{2018} - 1}$

3: 12 $\quad$ 3, 3, 3, 3 $\quad$ Base 12, 13, 14

13 $\quad$ 3, 3, 3

14 $\quad$ 3, 3

15 $\quad$ (12), 3

16 $\quad$ (13), 3

17 $\quad$ (14), 3

Hipotesis $15 = 12 + 3$

$k = 12$
$k+3 = 12+3$
$k+6 = 12+3+3$

Base 12
13
14

Hip $3x$ $\quad$ $3(x+1)$

$3x+1$ $\quad$ $3(x+1)+1$

$3x+2$ $\quad$ $3(x+1)+2$

Si este esta ↙ $\quad$ Este ↙

4- Base

1	Todos°
2	2
3	3
4	2·2
5	5
6	2·3

Todos los primos los descartamos pues ellos mismos son ese producto
A partir de los primos empezamos $x=2 \rightarrow$

2	2
4	2·2
6	2·3
8	2·2·2
10	2·5

$x = x$
$2x = x \cdot 2$
$3x = x \cdot 3$
$4x = x \cdot 2 \cdot 2$
$5x = x \cdot 5$
$6x = x \cdot 2 \cdot 3$
$7x = x \cdot 7$
$8x = x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$9x = x \cdot 3 \cdot 3$
$10x = x \cdot 2 \cdot 5$

Base 2 es primo

Hip

Suponer que 2, 3 ... x cumplen
$x+1$

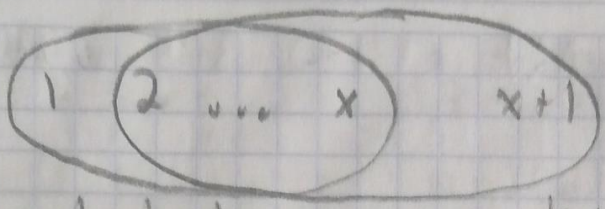
Si $x+1$ es primo ya acabaste
Si no $x+1 = ab$ $a \in [2 \dots x]$
$b \in [2 \dots x]$
Y ese intervalo es factorizable, entonces $x+1$ también se puede representar así

La inducción te dice
Ej dominó



Si 1 se cae, 2 también
La inducción fuerte:
Si del 1 al x se caen, $x+1$ también

5.



Esta mal la base porque decimos que en 1 si pero el argumento cumple a partir de 2

Mira lejos ¿Nuestro argumento a partir de que numero cumple?

6: $a_1 = 1$

$a_2 = 2 + (-1)^2 a_1$
$2 + 1$
3

$a_3 = 3 + (-1)^3 a_2$
0

$a_4 = 4 + (-1)^4 a_3$
4

$a_5 = 5 + (-1)^5 a_4$
1

$a_6 = 6 + (-1)^6 a_5$
7

$a_7 = 7 + (-1)^7 a_6$
0

$a_8 = 8 + (-1)^8 a_7$

1	1) 2
2	3) -3
3	0) 4
4	4) -3
5	1) 6
6	7) -7
7	0
8	8
9	
10	11
11	0
12	12

Casos
1° = 1
2° = n+1
3° = 0
4° = n

Caso 1
$n = n + -1 \cdot (n-1)$
$n = n - n + 1$
$n = 1$

Caso 2
$n = n + 1 \cdot 1$
$n = n + 1$

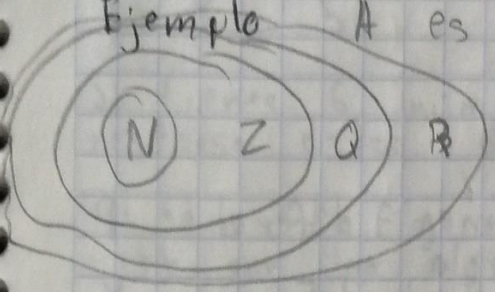
Caso 3
$n = n + -1 \cdot (n+1)$
$n = n - n \rightarrow 0$

Caso 4
$n = n + 1 \cdot 0$
$n = n$

Si es $n+1 \therefore n$

$a_{1000} = 1000$
$a_{2001} = 1$
$a_{3002} = 3003$
$a_{4003} = 0$

Ejemplo A es un conjunto de ∞ numeros reales
Ahi hay al menos un elemento x tal que
ese men no es racional



Demuestra que para toda n hay un subconjunto con n elementos tal que su suma no es racional

Tenemos $x = Q'$

a	Q	Q	Q
b	Q	Q	Q
a+b	Q	Q	?

Para $n=1$ tomamos x ✓
Supongamos que $n=2$ ✗
Pero si $x+a=Q$
y $x+b=Q$
$\therefore 2x+a+b=Q$
Pero para este a y b deben ser irracionales
Entonces ya hallamos +2 numeros que hacen posible este

366
732

n

n-1

Combinatorio

1= Hay 2 sexos
Hay 3 personas
A lo más hay 2 del mismo sexo

2= Suponer que cada persona cumple en un mes diferente como hay 12 meses habrá una que cumpla en uno de los otros meses

3= 0 - 300,000 Hay 300,001 tipos de cabello :v
Entonces el otro estará en cualquiera de ahí

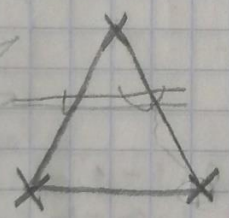
4= 367 si es bisiesto
733
(k-1) el numero de casillas +1

Para 2
Para 3
k

5= qs+1 perlas
s casillas

Si tienes qs perlas es s casillas quiere decir que hay q perlas en cada casilla y al aumentarle ese +1 irá necesariamente en una casilla que habrá q+1 perlas

6=



Una linea recta debera pasar por dos puntos, uno de entrada y otro de salida,
Hay dos casillas, una de entrada y otra de salida, hay 3 lados y este tercer lado no la puede tocar al menos que se encuentre en el vertice pero por instrucción no se puede

7= Hay n personas cada uno puede saludar a n-1 personas
n personas
n-1 formas → casillas Numa no contamos el 0

Si uno no saludó a nadie entonces el que saludó a todos no saludó a todos tendiamos un rango de 1 - n-2 de n
Si hay quien saludo al menos a 1 serian de 1-n-1
y hay personas

17

123510

$\frac{4!}{(4-2)!\,2!}$ $\frac{4\cdot 3}{2}$ 6

8- ~~1~~ 5k 5k+1 5k+2 5k+3 5k+4 otro

Si tienes 6 números habra 2 del mismo tipo y al restarse estos dará multiplo de 5

9: a b c d e f g 7k 7k+1 7k+2 ... 7k+6

Ya con 7k la haces

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7k	7k+1	7k+2	7k+3	+4	+5	+6	7k	+1	+2	

1000 1000100 10 1

a b c d e f g

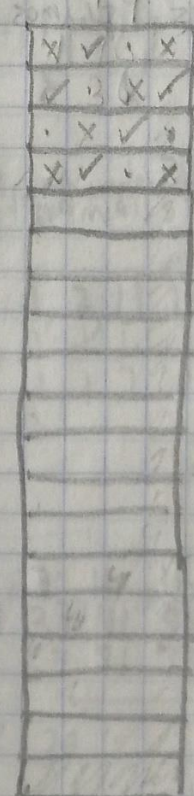
1 5 4 6 2 3 1

mod 7

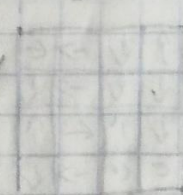
1111111

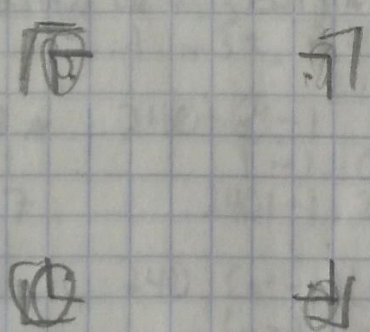
10: 76 cuadraditos

$$\begin{array}{r} 25 \\ 3\overline{)76} \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$



Todo r
v
a
r va
r a v
v



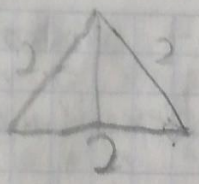


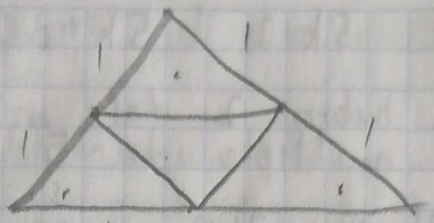
Contando lo que nos importa para que se repitan son $\binom{4}{2}=6$ formas diferentes y hay 3 diferentes colores, $6\cdot 3=18$ y hay 19 entonces se repetirá 1 vez

$1 + x^2 = 4$

$\sqrt{3}$

13:-





Puede dividirse en 4 triangulos y hay 5 puntos entonces 1 punto estará en ese rango

9:-

$(b+c+d)+(e+f+g) = b+c+d+e+f+g \equiv 0 \pmod 7$

~~a~~ b c d e f g

Ejemplo

$1 < \lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \dots$

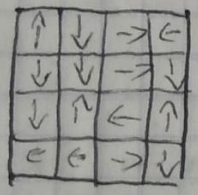
$x^3 \geq 3$

$x \geq \sqrt[3]{3}$

Demuestra que hay infinitos primos a distancia ak

Casillas: 0 1 2 3 ... $a-1$

Hay infinitos primos y casillas finitas eso garantiza que habra infinitos elementos en 1 casilla



$\frac{4!}{(4-3)!4!}$ $\frac{4!}{(4-3)!3!}$ $\frac{4}{1}$

4 9 16 25 — 36 49 64 81 — 4 1 0 1 4 — 1 0 1

$2k \equiv x \pmod 2$

$k \equiv x \pmod 1$

Teoría de Numeros

C15: $x^2+y^2+z^2 = 8k+7$

Impar

$8k+7 \equiv 7 \pmod 8$

Los ^{2} mod 8 = 4, 1, 0 ó 1

Las posibilidades de combinación serán:

4,4,4 = 12	1 1 1 = 3	0 0 0 = 0
4,4,1 = 9	~~1 1 4~~	~~0 0 1~~
4,1,1 = 6	~~1 4 4~~	~~0 1 1~~
4,4,0 = 8	1 1 0 = 2	~~0 0 4~~
4 0 0 = 4	1 0 0 = 1	~~0 4 4~~
4 1 0 = 5	~~1 4 0~~	~~0 4 1~~

Ninguna combinacion de la suma modular da 7 (mod 8)

C16: Si p-q es potencia de 2 → p+q es divisible entre 3

	m4	m5	m8	m16	m3
2	2	2	2	2	2
4	0	4	4	4	1
8	0	3	0	8	2
16	0	1	0	0	1
32	0	2	0	0	2
64	0	4	0	0	1
128	0	3	0	0	2
256	0	1	0	0	1

Todo primo será 1 mod 3 ó 2 mod 3 porque si fuera 0 sería multiplo de 3 y esos no son primos

Para m 2 m3 = 1-2 ~~0-1~~

1 m3 = 2-1 ~~+0~~ no podemos usar el 0 porque no sería primo

C17 ★ $240 \mid a^4-1$

1	1 -1	0 ✓
7	2401-1	2400 ✓

$240 \mid (a^2-1)(a^2+1)$ con $(a-1)(a+1)(a^2+1)$

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 mod 2

1 1 2 1 2 1 2 1 1 2 1 2 1 1 mod 3

$a^4 \equiv 1 \pmod{240}$

$a^4 \equiv 241 \pmod{240}$

Lo ~~6n+1~~ ~~6n-1~~

1	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	49	53	59
61	67	71	73	77	79	83	89

dif 30

Que hacer cuando no sabes que hacer

Sólo vez el problema

Paso 1: El abismo

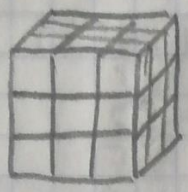
Lo mas importante: salir de él

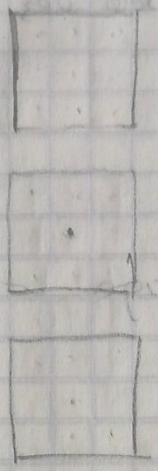
Hacer lo que sea

Paso 2: Salir ¡Haz algo!

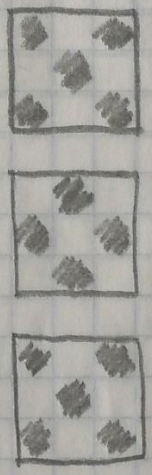
Paso 3: ¿Que hacer? → Next page

Coloracion





Solución



● 14

□ 13

Total 27

Sucesión

□ ● □ ● □ ● ...

Va a faltar un cuadrito blanco y por eso no se puede

Del □ vas a ● por ser adyacente

Si hay tableros, intentar colorear

Invarianza

$2017 - 8 = 2009$ $\quad 2009 - 9 = 2000$ $\quad 2000$

$2017 - 6 = 2011$

$2011 - 12 = 1999$

$1999 - 18 = 1981$

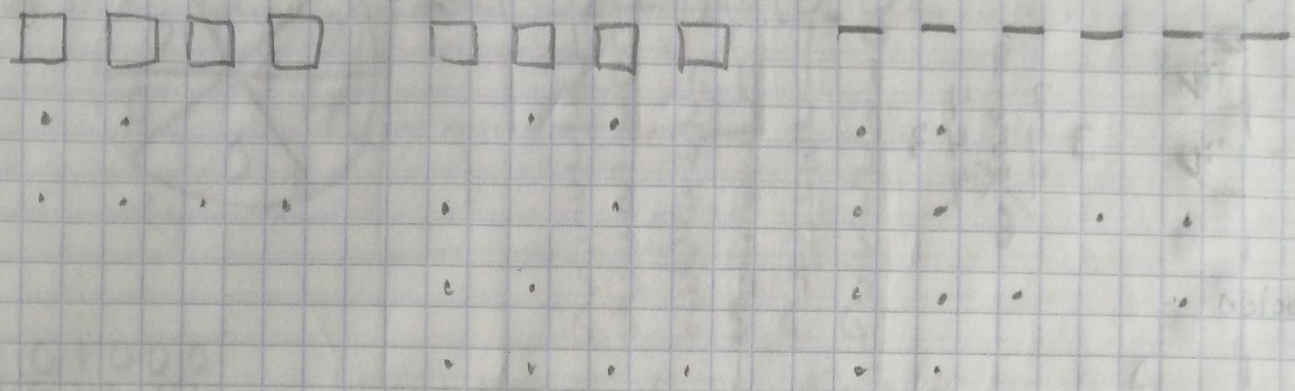
Solución

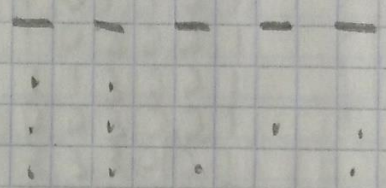
$$\Sigma = \frac{2017(2018)}{2} = 2017(1009)$$

impar · impar = impar

Buscar que no cambia
Intentar paridad
Sumar todo

Memo varianza





Solución

□ = 1 Empiezas

• = 0 Terminas

11010
10110
10000

Se va haciendo más pequeño el número binario
Y en algun momento tendra un final, el 0

Si pide buscar algo que tenga final 2
Buscar algo que siempre cambie

Juego

100 p 1, 2, 3, 4

T empieza
F podra ganarle

1 4 → 5
2 3 → 5
3 2 → 5
4 1 → 5

5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
90
95

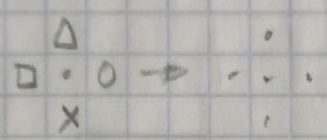
Ver cuales sí y cuales no

Principio extremo

$2+2+2+2 = 8 \div 4 = 2$

8
7 6 4
3 4 5 4 3
9 ~~9~~ 4
6

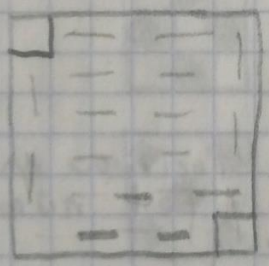
Solución



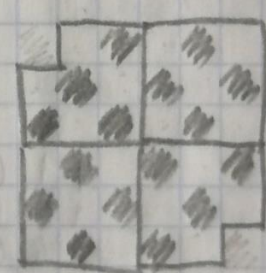
Ver casos especiales

Problemas

1.-



34 cuadritos

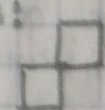


18 □

16 ●

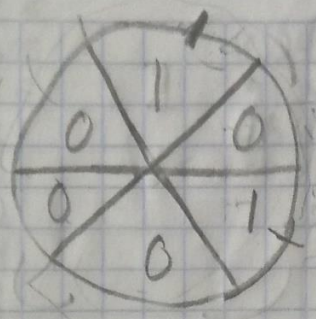
Un $2 \cdot 1 =$ □●

Sobran 2 □ y no son adyacentes:



?

2:-



1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 1 1
1 0 1 1 2 1
1 0 2 2 2 1
1 1 3 2 2 1
2 2 3 3 2 1
3 3 3 3 2 2 1
4 3 3 3 2 2 2
4 3 3 2 3 3
4 3 3 4 3

1 0 1 0 0 0
1 1 2
2 2 2
0 1 1
1 2 1
3 2 3 2 2 2
4 2 4 3 2 3
3 3 4
4 4 4

1 0 1 0 0 0 → 1 1 2 1 1 0
2 1 1 1 1 0 2 2 2 2 2 0
3 2 1 2 2 0 3 2 2 2 2 1
3 1 3 2 3 2
4 3 1 3 4 1 4 2 2 2 4 4
3 1 3 4 1 4

1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 1 1
1 0 1 1 2 1
1 0 2 2 2 1
1 1 3 2 2 1
2 2 3 3 2 1
3 3 3 3 2 2 1
4 3 3 3 2 2 2
4 3 3 2 3 3
4 3 3 4 3

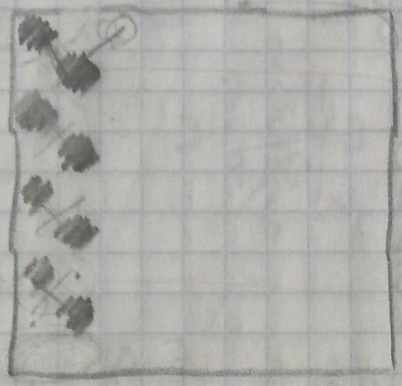
1 0 1 0 0 0
1 1 2
2 2 2
0 1 1
1 2 1
3 2 3 2 2 2
4 2 4 3 2 3
3 3 4
4 4 4

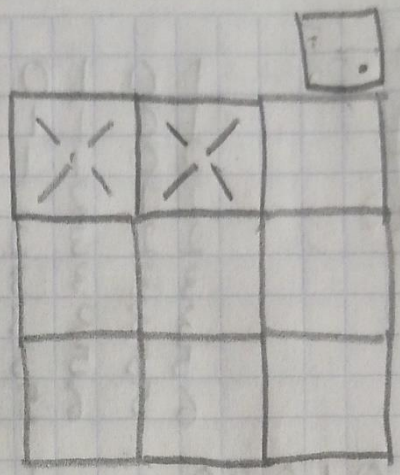
1 0 1 0 0 0
1 1
0 1
1 1
0 1
1 1
0 1
1 1
0 1
1 1
0 1

5

5.- P_1

P_2





6.- Toño

4.-

P_1

P_3 P_2

P_4 P_3

Pueden todos tener no pero

$xy \geq 1$

1 4 1
2 4
4 2

2 2 2 1
2 4 1
2 1 1

3:-
1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
~~2048~~

1024
512
256

1 vez
3

Quien quite la ultima gana

2 1
2 1 2
2 1

1008
2 | 2017
17
1

F T F T

F wins

2017
− 1024
993
256
7

F

Con 1 gana
2
3
4
5
6
7
8
9

F
F
T
F
F
T
F
F
T

Mult 3

3k	3k+1	3k+2
3 6 9	1 4 7	2 5 8
T	F	F

No impar

1 1
4 4
7 4, 2, 1 F Impar

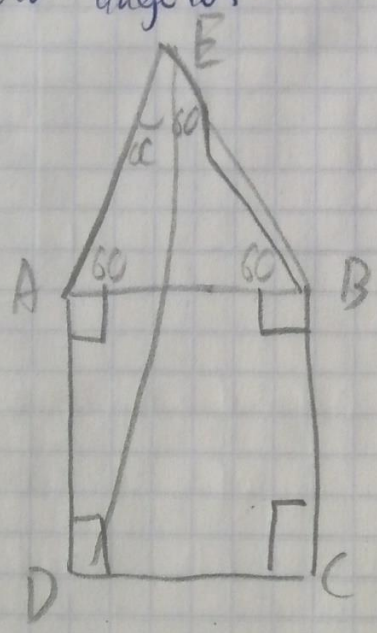
2 2
5 2, 2, 1
8 2, 4, 2 F Impar

3 2, 1
6 4, 2
9 4, 2, 2, 1 T Par

10 4, 2, 1, 2 1

Perseguir angulos

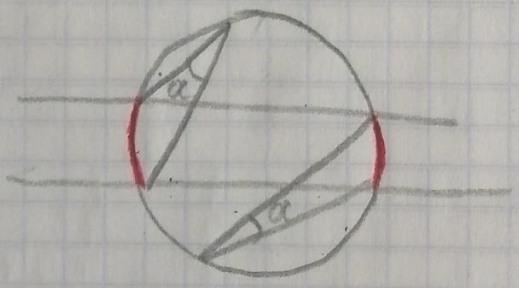
Ej.



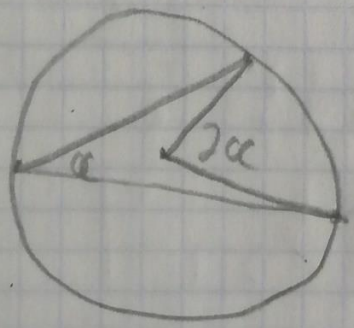
$\triangle EAD$ = Isosceles $\quad \measuredangle EAD = 150$

Teoremas shidos:

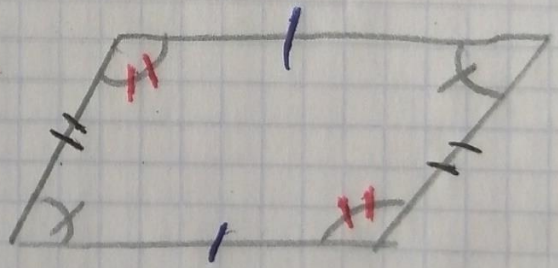
1:



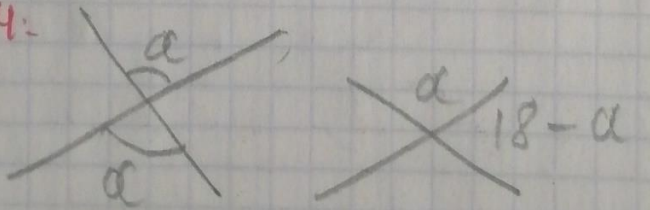
2:



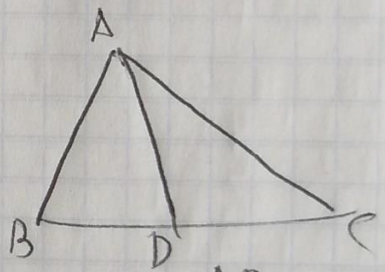
3:



4:



5:



$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC}$

Criterios de semejanza:

AAA LAL

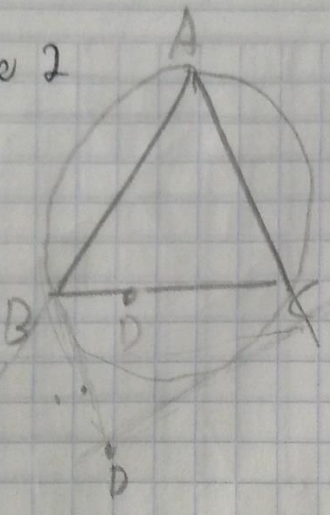
LLL

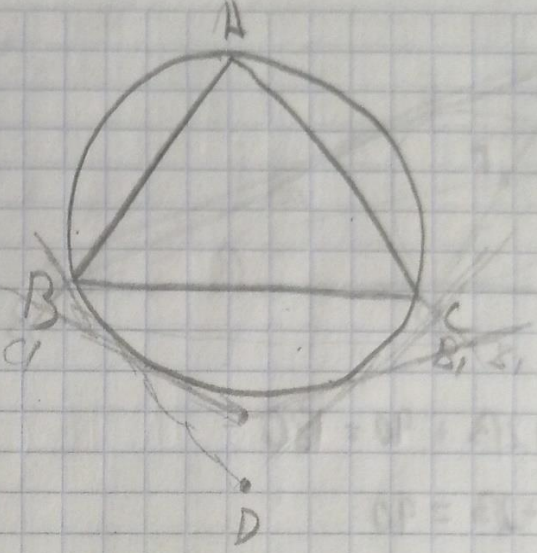
Congruencia

ALA LAL

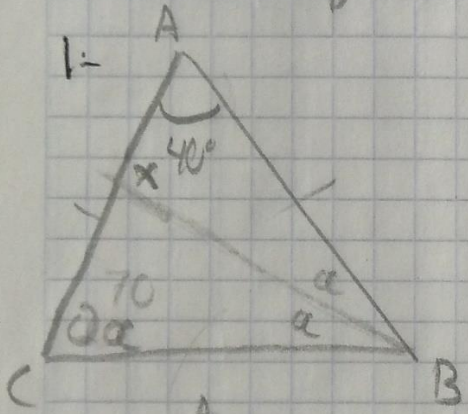
LLL

Ejemplo 2





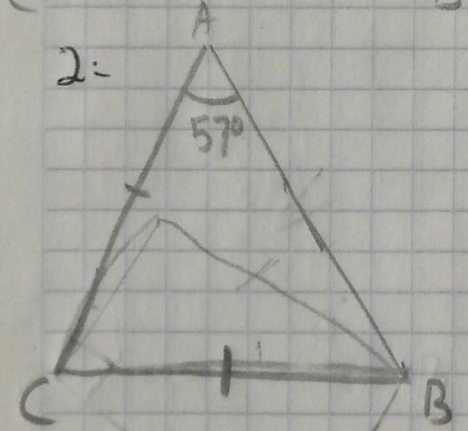
1:

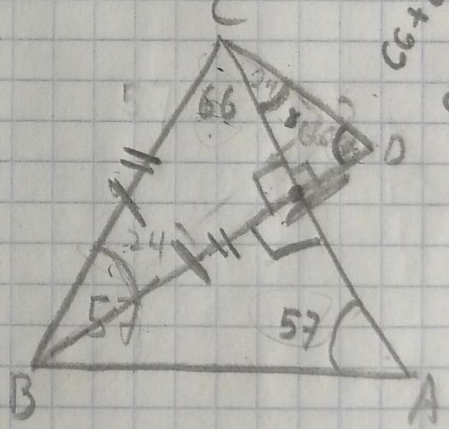


$40 + 2a + 2a = 180$
$4a = 140$
$2a = 70$
$a = 35$

$40 + 35 + x = 180$
$x = 75$

2:





$66 + 24 + D$

$66 + a$

$a + 66 + a + 90$

$2a = 24$

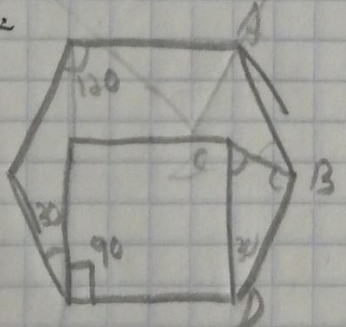
$a = 12$

$57 + 57 = 114$

$66 + 90 = 156$

Si BDC es isosceles su suma:
$24 + (66 + \alpha) + (66 + \alpha) = 180$
$\alpha = 12$
$66 + \alpha = 78$

3:



$\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$

$\frac{4 \cdot 180}{6}$

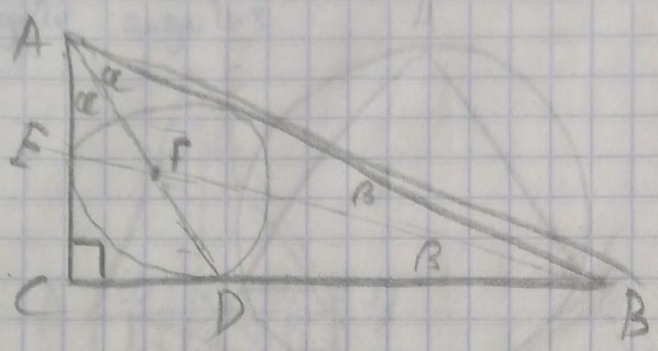
120
720

cada angulo

Los ∠ de BCD = 30, 75 y 75
$\therefore \angle ABC = 180 - 75 = 45$

$\angle ABC = 45$

4-



$2\alpha + 2\beta + 90 = 180$

$2\alpha + 2\beta = 90$

$\alpha + \beta = 45$ $\quad \therefore \alpha + \beta + AFB = 180$

$45 + AFB = 180$

$\therefore AFB = 135$

5-

