

13/08/2018

Docente: Irma Acero Díaz
Materia: Cálculo Diferencial

Evaluación de Cuaderno (+1 punto si es el más bonito)
Cuaderno único de la materia cuadro chico
Uso de paquetes matemáticos, (Wolfram Alpha)
Proyecto final donde se observe la aplicación del
cálculo → Imprimir Programas

Examen
Parcial 1 70%

Minioexámenes
15%

Tareas, proyectos, participaciones
15%

Habrán tareas que deben entregarse y subirse a
Aula Virtual

Ejercicios en equipos
Asesorías (después de las 12:00)

Parciales 1, 2 y 3 son independientes

Examen de Recuperación:

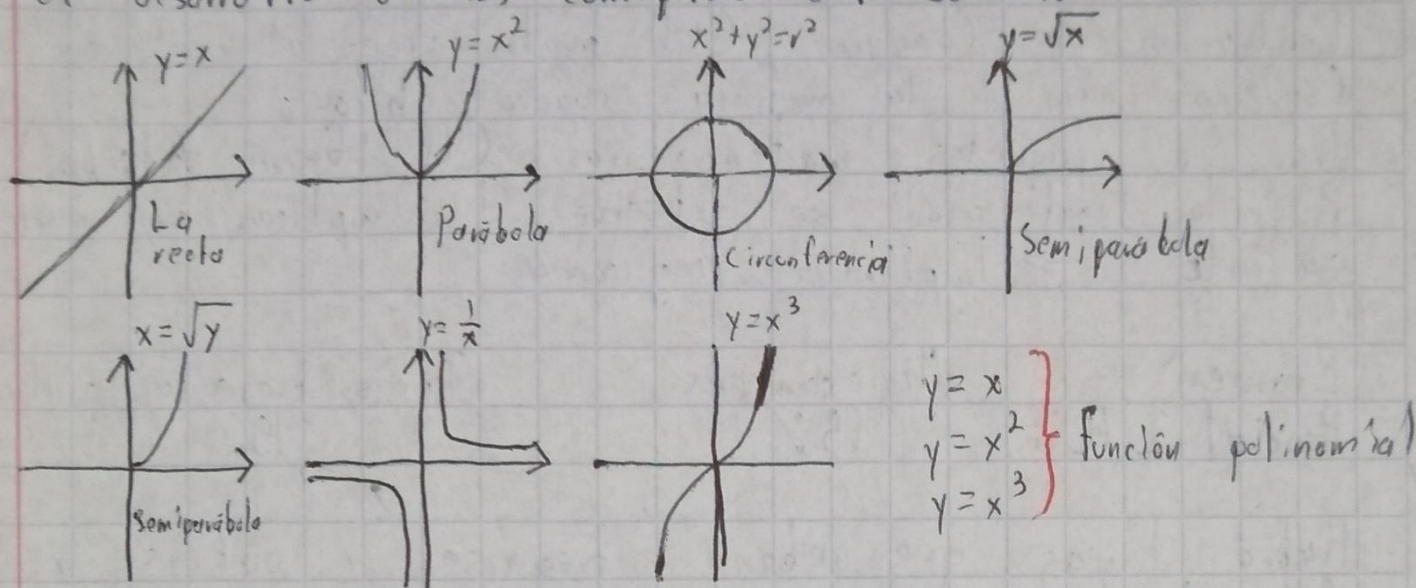
- Solamente en el primer parcial
- Serzoso aprobar el segundo parcial

$$(x) + 0 \uparrow (x+0) \leftrightarrow f(x)$$

14/08/2018

Unidad 1: Funciones

1- Catálogo de la gráfica de ecuaciones básicas para el desarrollo de los conceptos del Cálculo



La circunferencia no es función

"Todo función es ecuación pero no toda ecuación será función"

Transformación de Funciones

Sea $y = f(x)$

- Si se transforma la función de $y = f(x)$ a $y = -f(x)$ la función se reflejará con respecto al eje x

2- Traslación horizontal y vertical de la gráfica de las ecuaciones básicas

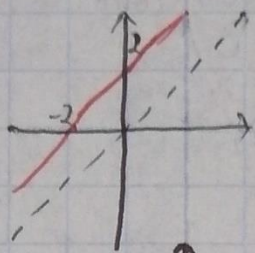
Las traslaciones verticales y horizontales son los desplazamientos de una ecuación en el sistema de coordenadas (x, y) , si trasladamos la representación gráfica de una ecuación dada, obtendremos representaciones de ecuaciones relacionadas; siempre la gráfica de la ecuación será igual a la original.

Traslación Vertical

Si realizamos una traslación vertical de una función, la gráfica se moverá de un punto a otro determinado en el

sentido del eje y , es decir, hacia arriba o hacia abajo

Ejemplos:
a) $y = x + 2$



$$y = x + 2$$

$$0 = x + 2$$

$$-2 = x$$

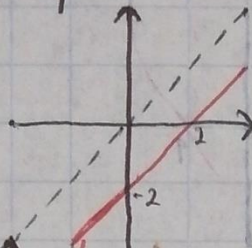
$$x = 0$$

$$y = 0 + 2$$

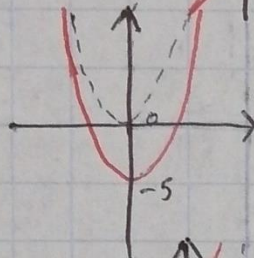
$$y = 2$$

Despejar para conocer cortes

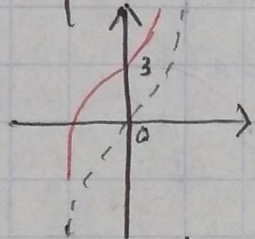
b) $y = x - 2$



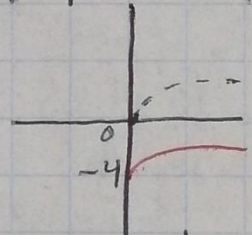
c) $y = x^2 - 5$



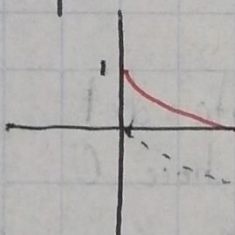
d) $y = x^3 + 3$



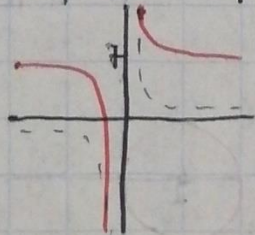
e) $y = \sqrt{x} - 4$



f) $y = -\sqrt{x} + 1$



g) $y = \frac{1}{x} + 7$

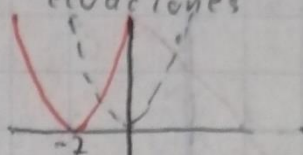


16/08/2018

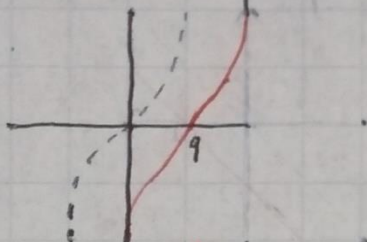
Traslaciones Horizontales

Gráfica por traslaciones las ecuaciones de los incisos

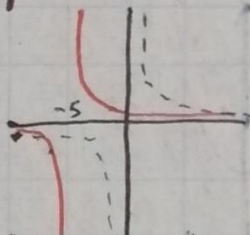
a) $y = (x+2)^2$



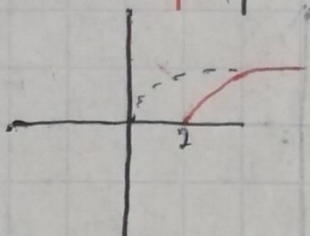
b) $y = (x-9)^3$



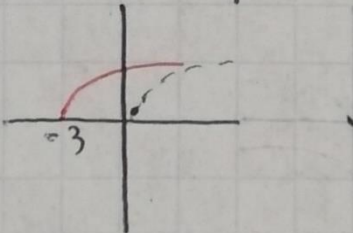
c) $y = \frac{1}{x+5}$



d) $y = \sqrt{x-2}$

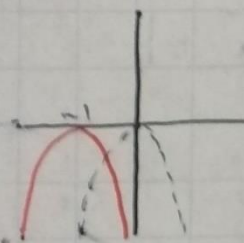


e) $y = \sqrt{x+3}$



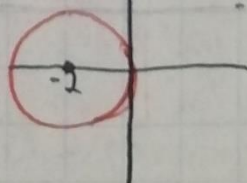
f) $y = -(x+1)^2$

Independientemente del signo, $x = -1$ hace 0 a la ecuación



g) $(x+2)^2 + y^2 = 4$

Su centro quedará en $(-2, 0)$

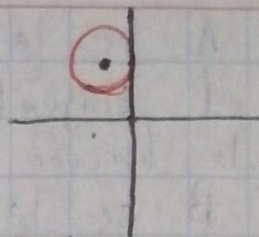


xd

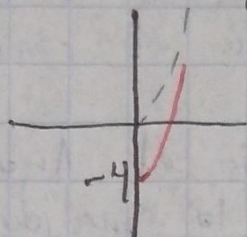
Hola

xd xd

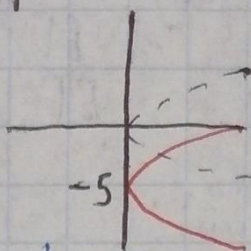
h) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$
 Centro: $(-2, 4)$



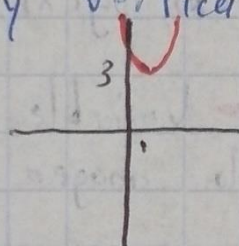
i) $x = \sqrt{y+4}$



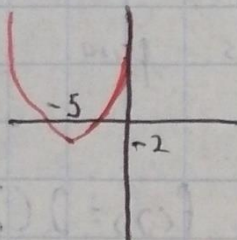
j) $x = (y+5)^2$



a) Desplazamiento Horizontal y Vertical
 $y = (x-1)^2 + 3$



b) $y = (x+5)^2 - 2$



3- Concepto de Función como Regla de Correspondencia (Definición Informal)

3.1 Definición y Gráfica. Dominio, rango

Definición de Función

Una función de un conjunto A correspondiente a un conjunto B es una relación que establece que un elemento x que pertenece a A le corresponde un único elemento $y \in B$.

Al conjunto A se le llama Dominio y a B el rango o contradominio de la función f .

Al conjunto A se le llama el dominio de la función f y es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida.

Al conjunto B se le llama rango y es el conjunto solución, en cambio, el contradominio son todos los "y".

Por ejemplo:

Una función sería el Área de un círculo ya que el área depende de la medida del radio $A = \pi r^2$

Como $r \geq 0$. $\therefore$ El dominio es $r \geq 0$

El rango es $A \geq 0$

17/08/2018

Notación de Función

Se denotan como $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc.

y $z = f(x)$

Variable dependiente

Variable independiente

También $f(x)$ es la imagen de x según f

Por ejemplo:

Encontrar las imágenes para $x=2$, $x=-1$, $x=9$, $x=3$
donde $f(x) = 2x + 3$

Solución

Para $x=2$ evaluamos $f(2) = 2(2) + 3$ Su imagen es 7

-1

9

3

$2(9) + 3$
9

Ejercicio

Para $f(x) = 2x + x^2$ encontrar las imágenes de $x=0$ $x=1$

$x = x+h$ y hallar la operación $f(x+h) - f(x)$

$x=0$ Su imagen es $y=0$

$x=1$ $y=3$

$$x = x+h \Rightarrow f(x) = 2(x+h) + (x+h)^2$$
$$2x + 2h + x^2 + 2xh + h^2$$

Para hallar la función

$$y = 2x + 2h + x^2 + 2xh + h^2$$

Sustituimos

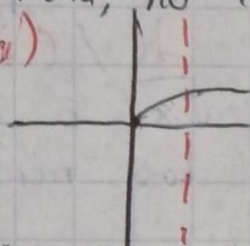
$$2x + 2h + x^2 + 2xh + h^2 - (2x + x^2)$$

$$\frac{2h + 2xh + h^2}{h} \rightarrow \frac{h(2 + 2x + h)}{h} \rightarrow 2 + 2x + h$$

El Procedimiento de la Recta Vertical

Si una gráfica es una función, con la técnica de la recta vertical se determina. Si toca 2 puntos de la recta, no es una función.

Ejemplos a)



es función

b) $x^2 + y^2 = 1$

No es

c) $y = \sqrt{x}$

Si es

d) $y = x^2$

Si es

e) $y = x^3$

Si es

f) $x = y^2$

No es

g) $\neq$

No es

h) $\neq$

No es

Gráficas por Tabulación

Para graficar una función primero se requiere conocer su dominio, identificar qué valores posibles en x , toma la función y con alguno de estos valores identificamos sus imágenes formando las parejas ordenadas (x, y) y localizamos estas parejas ordenadas en el plano cartesiano uniendo sus puntos y así se forma la gráfica correspondiente a la función dada.

Ejemplo

a) Graficar

por tabulación

Domínio

$x \in \mathbb{R}$

$$y = 2x + 1$$

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

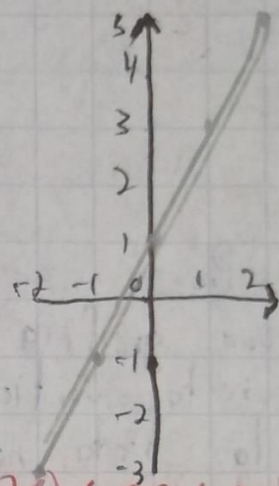
$$(-2, -3)$$

$$(-1, -1)$$

$$(0, 1)$$

$$(1, 3)$$

$$(2, 5)$$



20/08/2018

Cuando no hay funciones del tipo $\sqrt{x}$ o $1/x$ el dominio de la función son todos los reales

Ejemplo:

Realiza la siguiente gráfica

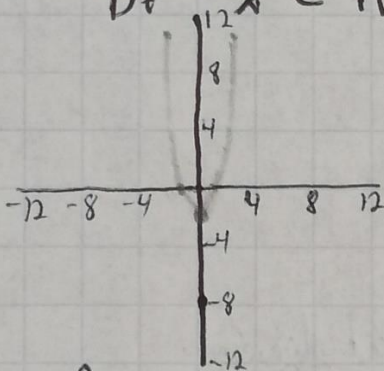
$$f(x) = 3x^2 - 2$$

De

$x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \rightarrow y \in [-2, \infty)$

x	y
-2	10
-1	1
0	-2
1	1
2	10



Realiza la siguiente gráfica

$$h(x) = \sqrt{1 - 3x}$$

$$1 - 3x \geq 0$$

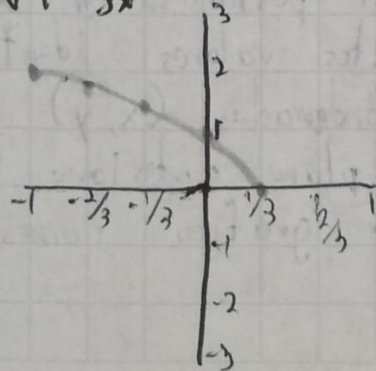
$$-3x \geq -1$$

$$x \leq 1/3$$

$\rightarrow D_f: x \in (-\infty, 1/3]$

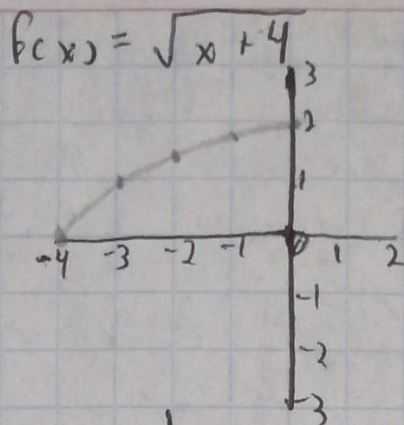
$\mathbb{R} \rightarrow y \in [0, \infty)$

x	y
-1	2
-2/3	$\sqrt{3}$
-1/3	$\sqrt{2}$
0	1
1/3	0



Graficar

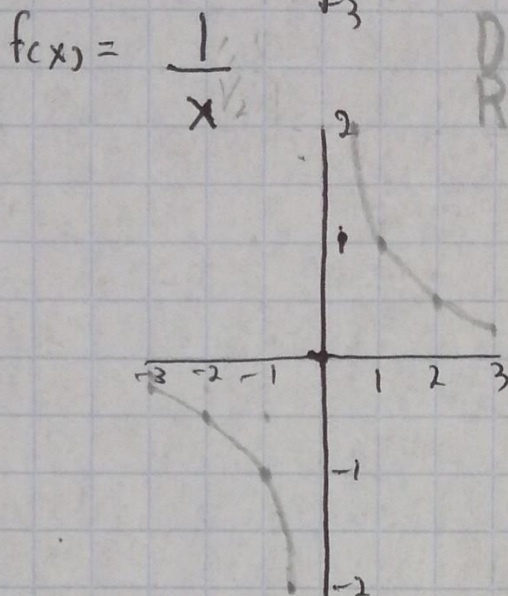
x	y
-4	0
-3	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	1



$D_f = x \in [-4, \infty)$
 $R_f = y \in [0, \infty)$

Graficar

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



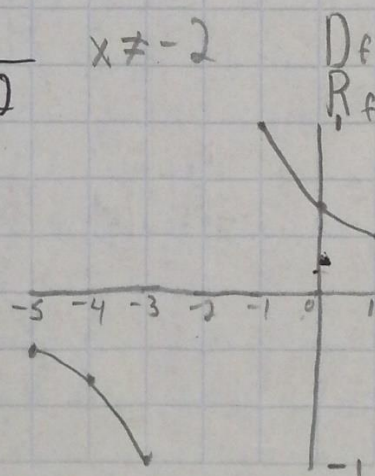
$D_f = x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 $R_f = y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Tarea Graficar e identificar dominio y rango

- a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
 b) $g(x) = \sqrt{2x+3}$
 c) $h(x) = 3x+4$

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

x	y
-5	$-\frac{1}{3}$
-4	$-\frac{1}{2}$
-3	-1
-1	1
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$



$D_f = x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$
 $R_f = y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

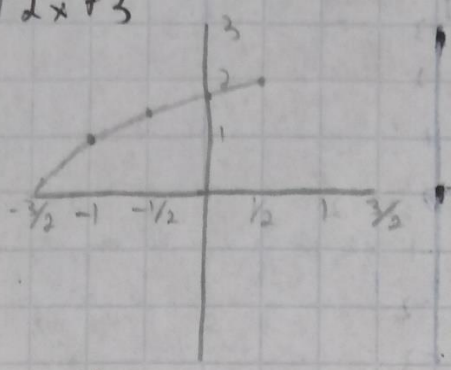
$$2x = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

b) $g(x) = \sqrt{2x+3}$

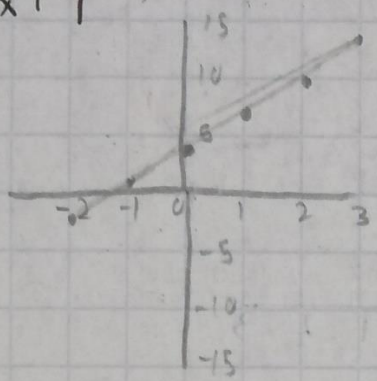
x	y
$-\frac{3}{2}$	0
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
0	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}$	2



$D_f = x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$
 $R_f = y \in [0, \infty)$

c) $h(x) = 3x + 4$

x	y
-2	-2
-1	1
0	4
1	7
2	10
3	13



$D_f = x \in \mathbb{R}$
 $R_f = y \in \mathbb{R}$

d) $y = \sqrt{4-x^2}$
 $(2-x)(2+x)$
 $x=2, x=-2$

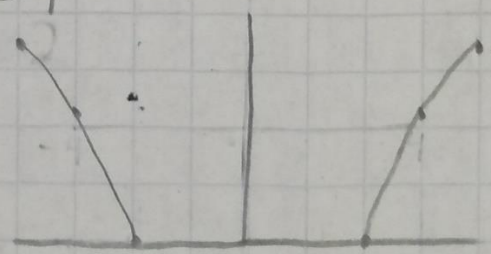
$D_f = x \in [-2, 2]$
 $R_f = y \in [0, 2]$

x	y
-2	0
-1	1.73
0	2
1	1.73
2	0

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$x^2 - 4 \geq 0$
 $x^2 \geq 4$

x	y
-4	3.46
-3	2.23
-2	0
2	0
3	2.23
4	3.46



Traslación horizontal y vertical de la grafica de funciones

Las funciones se trasladan según lo siguiente

• $f(x) + c$

Traslación vertical

• $f(x+c)$

Traslación horizontal

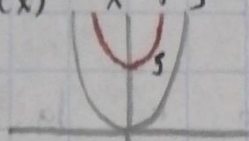
Ejemplo

Grafique por traslaciones las graficas

a) $f(x) = x^2 + 5$

$D: x \in \mathbb{R}$

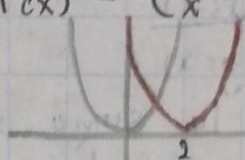
$R: y \geq 0$



b) $f(x) = (x-2)^2$

$D: x \in \mathbb{R}$

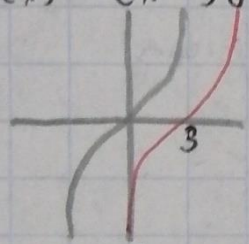
$R: y \geq 0$



c) $f(x) = (x-3)^3$

$D: x \in \mathbb{R}$

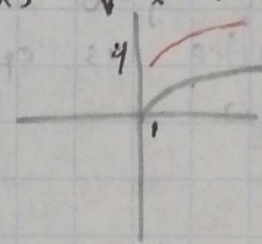
$R: y \in \mathbb{R}$



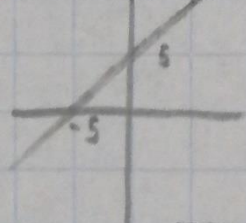
d) $f(x) = \sqrt{x-1} + 4$

$D: x \geq 1$

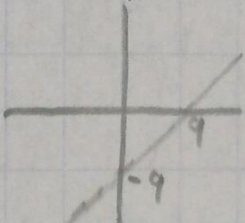
$R: y \geq 4$



e) $f(x) = x + 5$



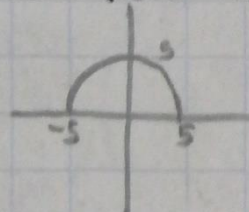
f) $f(x) = x - 9$



g) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$D: x \in [-5, 5]$

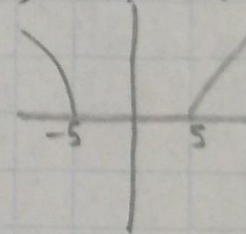
$R: y \in [0, 5]$



h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

$D: x \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

$R: y \geq 0$



$$f(g(x))$$

$$g(f(x))$$

⇒

Operaciones con Funciones: Suma, Resta, Producto, Cociente y Composición

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones en las que se puedan aplicar operaciones

- a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

El dominio de la suma, resta y producto es la intersección de los dominios de f y g

El dominio de la división difiere ya que hay que hallar cuándo $g \neq 0$

Ejemplo Realice las operaciones de funciones
 $f(x) = x$ $g(x) = 2x + 3$

Suma

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$D_g = x \in \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = x + 2x + 3 = 3x + 3$$

Resta $x \in \mathbb{R}$

$$x - 2x + 3 = -x + 3$$

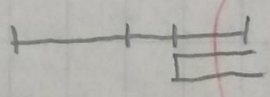
Producto $x \in \mathbb{R}$

$$x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$

División

$$\frac{x}{2x + 3}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 &\neq 0 \\ 2x &\neq -3 \\ x &\neq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$



$f \circ g(x)$

$x \in D_g$

$g(x) \in D_f$

23/08/2018

Ejercicio Realiza las operaciones con funciones

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x+3}$$

$$D_g = x \geq -3$$

Suma

$$2x^2 - 1 + \sqrt{x+3}$$

$$D_{f+g} = x \in [-3, \infty)$$

Resta

$$2x^2 - 1 - \sqrt{x+3}$$

$$D_{f-g} = x \in [-3, \infty)$$

Producto

$$(2x^2 - 1)(\sqrt{x+3})$$

$$D_{fg} = x \in [-3, \infty)$$

División

$$\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x+3}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = x \in (-3, \infty)$$

$$f(x) = x + 8$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 9$$

$$D_g = x \in \mathbb{R}$$

Suma

$$x + 8 + x + 9$$

$$D_{f+g} = x \in \mathbb{R}$$

Resta

$$x + 8 - (x + 9) = -1$$

$$D_{f-g} = x \in \mathbb{R}$$

Producto

$$(x+8)(x+9) = x^2 + 17x + 72$$

$$D_{fg} = x \in \mathbb{R}$$

División

$$\frac{x+8}{x+9}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = x \neq -9$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x-5}$$

$$D_g = x \neq 5$$

Suma

$$\sqrt{x} + \frac{x+3}{x-5}$$

$$D_{f+g} = x \in [0, 5) \cup (5, \infty)$$

Resta

$$\sqrt{x} - \frac{x+3}{x-5}$$

$$D_{f-g} = x \in [0, 5) \cup (5, \infty)$$

Producto

$$\frac{(x+3)\sqrt{x}}{x-5}$$

$$D_{fg} = x \in [0, 5) \cup (5, \infty)$$

División

$$\frac{(x-5)\sqrt{x}}{x+3}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = x \in [0, \infty)$$

$$x \geq \frac{0}{-5}$$

scribo

$$0 \geq \frac{x}{-5}$$

$$x \geq 9 - \frac{x}{-5}$$

$$\left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right]$$

$$x \in [-10, -\frac{3}{10}]$$

$$f(x) = \sqrt{x+8}$$

$$D_f = x \geq -8$$

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$$

$$D_f = x \neq -3$$

$$\text{Suma } \sqrt{x+8} + \frac{x^2-4}{x+3}$$

$$D_f = x \in [-8, -3) \cup (-3, \infty)$$

$$\text{Resta } \sqrt{x+8} + \frac{x^2-4}{x+3}$$

$$D_f = x \in [-8, -3) \cup (-3, \infty)$$

$$\text{Producto } \frac{x^2 \sqrt{x+8} - 4 \sqrt{x+8}}{x+3}$$

$$D_f = x \in [-8, -3) \cup (-3, \infty)$$

$$\text{División } \frac{\sqrt{x+8} \rightarrow \geq 0}{\frac{x^2-4}{x+3} \rightarrow \neq -3}$$

$$D_f = x \in [0, 2) \cup (2, \infty)$$

24/08/2018

Ejercicio

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suma } x^2 - 4 + x + 2$$

$$g(x) = x + 2$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Resta } x^2 - 4 - x - 2$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Producto } x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

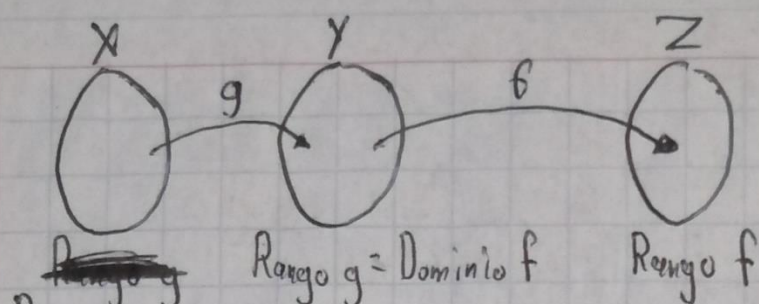
$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$\text{División } \frac{x^2-4}{x+2}$$

$$D_f = x \neq -2$$

Función Compuesta

Es una función formada por la aplicación sucesiva de dos funciones.
Es una función que está formada por la composición de dos funciones, es decir, la función resultante de aplicar a x una función en primer lugar y a continuación a este resultado le aplicamos una nueva función.
La forma en que se denota es $(f \circ g)$ o ~~$(f \circ g)(x)$~~
que se aplica primero g y luego f .



~~Rango g~~
Dominio g
Ejercicio
Componer

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$g(x) = x - 3$$

Hallar

$$(f \circ g)(x)$$

$$(x - 3)^2 + 5$$

$$(g \circ f)(x)$$

$$(x^2 + 5) - 3$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$(f \circ g)(x)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x+5}}$$

$$(g \circ f)(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 5}$$

$$(f \circ f)(x)$$

$$\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$(g \circ g)(x)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x+5} + 5}$$

$$(f \circ f)(3)$$

$$\sqrt[4]{3} = 1.316$$

$$(g \circ g)(5)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{10} + 5} = \frac{10}{51}$$

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$Df = x \geq -\frac{1}{3}$$

$$f \circ g$$

$$g(x) = 2x + 4$$

$$Dg = x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{6x+13}$$

28/08/2018

Encontrar el dominio

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

$$g(x) = 2x+4$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R} \cap D_g$$



$$x \in D_f$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}$$

$$2x+4 \geq -\frac{1}{3}$$

$$2x \geq -\frac{1}{3} - 4$$

$$x \geq -\frac{13}{6}$$

$\therefore$

$$D_{f \circ g} = x \geq -\frac{13}{6}$$

Ahora con $g \circ f$

$$2\sqrt{3x+1} + 4$$

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

$$x \in D_g \cap \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = x \geq -\frac{1}{3}$$

Ejercicio

$$f(x) = x+1$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x} + 1$$

$$D_f = x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$D_g = x \neq 0$$

$$D_{f \circ g}$$

$$x \in D_g$$

$$x \neq 0$$



$$g(x) \in D_f$$

$$\mathbb{R}$$

$$D(f \circ g)(x) = x \neq 0$$

$$(a+b)' \cdot (a-b)' = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b} = a-b$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+1}$$

$D_{g \circ f}$

$$x \in D_f$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$\cap$

$$f(x) \in D_g$$

$$f(x) \neq 0$$

$$x+1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$D_{g \circ f} = x \neq -1$$

Ejercicio

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x} + 4}$$

Dominio

$D_{f \circ g}$

$$x \in D_g$$

$$x \neq 0$$

$\cap$

$$g(x) \in D_f$$

$$\frac{1}{x} \geq -4$$

$$\frac{1}{x} \geq -4x$$

$$-\frac{1}{4} \leq x$$

$$D_{(f \circ g)} = x \geq -\frac{1}{4} \text{ y } x \neq 0$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

Dominio

$D_{g \circ f}$

$$x \in D_f$$

$$x \geq -4$$

$\cap$

$$f(x) \in D_g$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+4}} \neq 0$$

$$x+4 \neq 0^2$$

$$x \neq -4$$

$$x > -4$$

scriba

29/08/2018

6 - Tipos de Funciones Identidad, constante, lineal, algebraicas, polinomiales, racionales e irracionales definidas por intervalos par e impar, inyectiva y suprayectiva y biyectiva

Existen varios tipos de funciones de las que iremos conociendo las características de cada una de ellas

Estas son:

Función identidad: Definida como $I(x) = x$

Función constante: $f(x) = c$

Ejemplo

a) $f(x) = 2$ 

b) $f(x) = -3$ 

Función lineal: $f(x) = ax + b$ donde $a \neq 0$

Ejemplo

$f(x) = 3x + 10$

$m = 3$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow = \frac{3}{1}$

$b = 10$ (Corte en eje y)

$0 = 3x + 10$

$\frac{-10}{3} = x$ (Corte en eje x)

$f(x) = -\frac{1}{5}x + 3$

$m = -\frac{1}{5}$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow = \frac{-1}{5}$

$b = 3$

Corte en y

$x = 15$

Corte en x

30/08/2018

Funciones algebraicas

Funciones formadas por expresiones algebraicas, es decir, formadas por un conjunto de variables ligadas entre sí por operaciones algebraicas: suma, resta, producto, cociente, potencias

y raíces

Las funciones algebraicas se clasifican en explícitas e implícitas. Las explícitas son aquellas que se pueden obtener por sustitución simple

Ejemplo: $f(x) = 2x + 4$

Las implícitas son aquellas que no se pueden obtener por sustitución simple

Ejemplo: $2x + y + 1 = 4$

Función Polinomial

Es una función de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Con n siempre entero positivo

$$\frac{x^2 + x}{x - 1}$$

$$x^{-3} + x^5 + 1$$

} Son algebraicas pero no polinomiales

Ejercicio Identificar los coeficientes de las funciones polinomiales y su grado

1- $P(x) = 8x^8 + 9x^6 + 7x^5 + 2x^2 + 3x - 7$

$a_8 = 8 \quad a_7 = 0 \quad a_6 = 9 \quad a_5 = 7 \quad a_4 = 0$

$a_3 = 0 \quad a_2 = 2 \quad a_1 = 3 \quad a_0 = -7$

Función Racional

Formadas por el cociente de dos polinomios $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Ejemplo

a) $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$

b) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x+2}$

30/08/2018

Función Irracional

función cuya expresión analítica la variable independiente aparece debajo del símbolo de la raíz

Ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

31/08/2018

Función Par

Una función es par si $f(x) = f(-x)$

Ejemplo

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 \quad \therefore \text{es par}$$

Función Impar

Una función $f(x)$ es impar si $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \therefore \text{es impar}$$

Nota Una $f(x)$ es posible que no sea par ni impar

Ejemplo

$$f(x) = x^2 + x^3$$

Si la función tiene potencias pares sin constante ya sea polinomial o racional entonces la función es par

Ejemplos a) $f(x) = x^6 + 2x^4 + 3x^2$ es par

$$b) y = \frac{5x^4 - 3x^2}{x^6 + 7x^2} \quad \text{es par}$$

Si una función irracional donde su radicando tiene variables con potencias pares sin constante, $f(x)$ es par

Ejemplos

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^8 + 3x^2}$$

También puede tener constante

Si la función tiene potencias impares sin constantes,
la función es impar

Ejemplo

$$3x^3 - 4x^5$$

Esta es impar.

$$g(x) = \frac{-x^3}{x^3 + 5x}$$

D Par

$$\frac{-(-x)^3}{(-x)^3 + 5(-x)}$$

D impar

$$-\left(\frac{-x^3}{x^3 + 5x}\right)$$

$$\frac{x^3}{-x^3 + 5x} \rightarrow -(x^3 + 5x)$$

No cumple
 $f(x) \neq -f(x)$

$$\frac{x^3}{-(x^3 + 5x)}$$

Si es par

Verificar si son pares o impares

a) $3x^2 + 5x^4 - 3$

b) $7x^8 + x^2$

c) $8x^3 + 9x^5$

d) $8x^3 + 9x^5 + 3$

e) $x^5 - 10x^2 + x - 1$

f) $\frac{x^4 - ax^2}{3x^2 + 7x^2}$

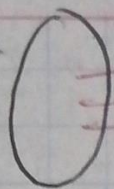
g) $\frac{x^4 - 1}{x^2 + 3}$

h) $\frac{x^5 - x^3}{x + x^3}$

i) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3}$

j) $\sqrt{2x^2 + 3x^4 + 4}$

03/09/2018



Dominio

Contradominio (TODOS los reales)
CodominioImprimir y pegar lo de funciones inyectoras y esotar
04/09/2018

Ejemplo

$$f(x) = 5$$

No es sobreyectiva

$$h(x) = 2x + 1$$

Es biyectiva

$$t(x) = x^3$$

Es biyectiva

$$g(x) = x^2$$

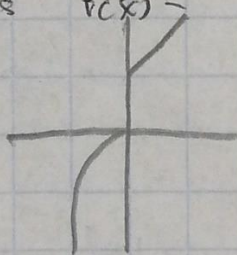
El rango de g es $x \in [0, \infty)$ $\therefore$ no es sobreyectiva

Ahora

funcion definida por intervalos

Tiene diferentes maneras de comportarse en su dominio. Un ejemplo es $f(x) =$

$$\begin{cases} x+4 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x > 2 \\ x^3 & 0 < x \leq 2 \\ 6 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 0 < x \leq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$R_f = x \in (0, \infty)$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

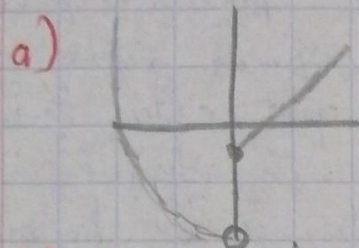
No es ni inyect ni sober

05/09/2018

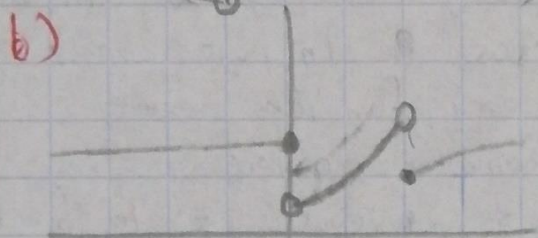
Graficar

a) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2-4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 4 \\ x^2+1 & 0 < x < 4 \\ 3 & x \leq 0 \end{cases}$



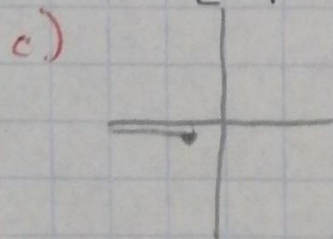
$D_f = x \in \mathbb{R}$
 $R_f = y \in (-4, \infty)$



$D_g = x \in \mathbb{R}$
 $R_g = y \in (1, \infty)$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \leq -2 \\ 9x+4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

d) $g(x) = \begin{cases} 7x-1 & \text{si } x \neq 4 \\ 9 & \text{si } x = 4 \end{cases}$



Las 2 estas
entregar como
fases

06/09/2018

Unidad 2 Límites y Continuidad

Los límites se usan en la derivación o derivadas comenzando por su concepto de derivada y nos ayudan mediante procesos o desarrollos matemáticos a demostrar la derivación. Hablar de límite intuitivamente cuando hablamos por ejemplo de velocidad, ya que siempre será un límite a medida de que vamos manejando un carro y nos acercamos tanto al que está frente a nosotros sin tocarlo para no ocasionar un choque, pues de lo contrario ocasionaría daños, esto nos da la idea de acercamientos a objetos o sucesos en la vida diaria. Matemáticamente hablando tomemos una función donde cualquier valor se acerca tanto como se quiere a un valor fijo en $x=a$ ¿qué efecto se produce en la función acercándose a "a"?

Ejemplo

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

Acercarse por la izquierda

$$x < 2$$

x	y
1.5	5.5
1.6	6.12
1.7	6.78
1.8	7.48
1.9	8.22

$f(x)$ en 2 tiende a 9

$$x > 2$$

x	y
2.5	13.5
2.4	12.52
2.3	11.58
2.2	10.68
2.1	9.82

$f(x)$ en 2 tiende a 9

10/09/2018

Encontrar el límite de $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ cuando $x \rightarrow -5$

x	y	x	y
-6	-11	-4.2	-9.2
-5.9	-10.9	-4.3	-9.3
-5.8	-10.8	-4.4	-9.4
-5.7	-10.7	-4.5	-9.5
-5.6	-10.6	-4.6	-9.6
-5.5	-10.5	-4.7	-9.7
-5.4	-10.4	-4.8	-9.8
-5.1	-10.1	-4.9	-9.9

por la izquierda Por la derecha
 $x \rightarrow -5^-$ $x \rightarrow -5^+$

Cuando ~~se~~ el límite por la izquierda y derecha son iguales, se dice que el límite existe.
 Se les llaman límites laterales.

Y ahora decimos:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 25}{x + 5}$$

11/09/2018

Propiedades de Límites

a) $\lim_{x \rightarrow 1} 5 = 5$

f) $7 \lim_{x \rightarrow 3} x = 7(3) = 21$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} -6 = -6$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} 8x^2 = 8 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 8 \cdot 2^2 = 32$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

$1 - 2(1)^2 = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 3 \cdot 2 = 6$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} (8x^2 + 10x) = \lim_{x \rightarrow 2} 8x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 10x$$

$$8 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 10 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x$$

$$32 + 20 = 52$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x+1}{\lim_{x \rightarrow 3} x^3} = \frac{4}{27}$$

12/09/2018

Técnicas para Encontrar Límites

Algunas veces los límites de las funciones presentan indeterminaciones en las cuales algunas pueden desaparecer factorizando, cancelando y racionalizando

Factorizar

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} = x-1 = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x - 2} = \frac{(x+4)(x+2)}{x-2} \text{ No se puede eliminar la indeterminación}$$

13/09/2018

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{(x-4)(x-2)}{x-2} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} x-4 = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} x-2 = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x} = \frac{x(x-4)}{x} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} x-4 = -4$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} \therefore \text{El límite} = 12$$

$$g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

$$\frac{1x}{x\sqrt{x+4} + 2}$$

$$\frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

Racionalización

Quitar radicales del denominador (Racionalizar denominador)

Ej: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{x+4-4}{x\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$

2- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \cdot \frac{2 + \sqrt{4-x}}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{4 - (4-x)}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$
14/09/2018

3- $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

Solución 1

$$\frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} = \frac{1}{\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{10}$$

Solución 2

$$\frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} = \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{10}$$

4- $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

Factorizar

$$\frac{(x+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = 6$$

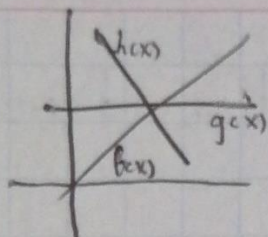
Racionalizar

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = 6$$

Teorema del Empevedado

Sea "f", "g" y "h" para todo x aproximado a c con la posible excepción de c

Si el $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$



Ejemplo

Sea $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $h(x) = 1$

donde $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

17/04/2018

Ejercicio

Sea $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$, $g(x) = \frac{x^2+x}{x}$ y $h(x) = e^x$

Encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x}$

$$2\sqrt{x+1} - 1 \leq \frac{x^2+x}{x} \leq e^x$$

$$2\sqrt{0+1} - 1 \leq \frac{x^2+x}{x} \leq e^0$$

$$1 \leq \frac{x^2+x}{x} \leq 1$$

O factorizando $\frac{x(x+1)}{x} \rightarrow 0+1 = 1$

$$\sin x + \cos x = 2 \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 x}{x + x \cos x}$$

$$\frac{\sin x \cdot \sin x}{x \cdot (1 + \cos x)}$$

$$\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

1 0 0

Ejercicio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$$

$$\frac{\sin 3x}{x(\cos 3x)}$$

$$\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cos 3x}}_3$$

3

Limites Laterales Repaso

Ejercicio

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

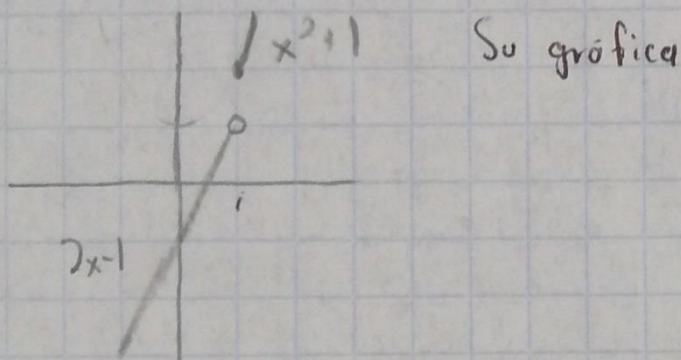
- a) Verificar si cuando $x \rightarrow 1$ existe
 b) " " " " $x \rightarrow 3$ existe

a) $(1)^2 + 1 = 2$ No existe

$2(1) - 1 = 1$

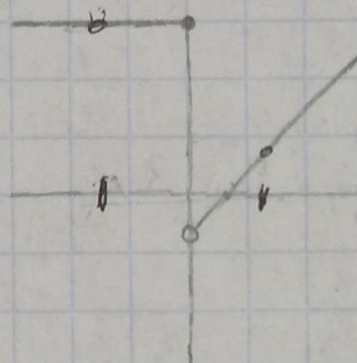
b) Si existe :v

18/09/2018



Ejercicio

$g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x > 0 \\ 9 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$



Verificar si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 9$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -2$ $\therefore$ no existe

El otro si existe

Ejercicios

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ No existe

b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \sqrt{x+4}$ No existe

c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x+1}{x}$ $\frac{11}{5}$

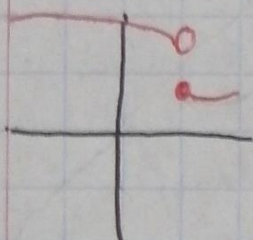
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ 0

e) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \sqrt{x+4}$ 0

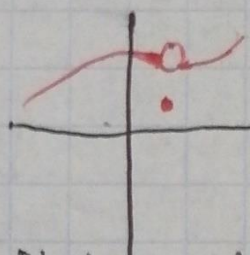
Continuidad

Continuidad en un punto

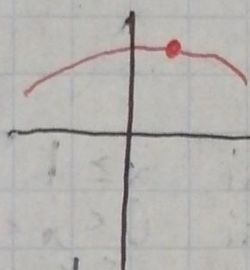
En el lenguaje ordinario usamos continuo para describir un proceso que sigue sin cambio. Es esta noción en la que se aplique a funciones, consideremos las gráficas siguientes



El lim no existe



El lim existe pero es distinta a la función evaluada ahí



Es continua

No es continua

No es continua

Para ser continuo requiere;

- Que el límite exista
- Que la función evaluada sea igual al límite

Definición de Continuidad en un Punto

Decimos que f es continua en c si un intervalo abierto en torno a c está contenida en el dominio de f y $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

19/09/2018

Ejercicio

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x - 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determina si la función es continua en $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$

$x = -2$

$f(-2) = -5$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -5$

$\therefore$ es continua

$x = 0$

$f(0) = 1$

El $\lim$ no existe

$\therefore$ es discontinua

$x = 3$

$f(3) = 28$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 28$

$\therefore$ es continua

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x+5} & \text{si } -5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Verifique si en $x = 1$, $x = 5$ y $x = -4$ si es continua

$x = 1$ $f(1) = 0$

$\lim$ no existe $\therefore$ no es continua

$x = 5$ $f(5) = 24$

$\lim = 24$ $\therefore$ es continua

$x = -4$ $f(-4) = 1$

$\lim = 1$ $\therefore$ es continua

$x = 0$ $f(0) = \sqrt{5}$

$\lim$ no existe $\therefore$ no es continua

20/09/2018

Discontinuidad Eliminable

Una discontinuidad es eliminable en un punto $x=a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y este es finito

Existen dos maneras o dos tipos de discontinuidad evitable:

Caso 1: Cuando la función no está definida en $x=a$ como es este caso

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe pero $f(1)$ no existe

Para quitar la discontinuidad en $x=1$ redefinimos la función $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

$f(1)$ ya existe y es igual a su límite

Caso 2: Cuando la imagen no coincide con el límite de la función cuando x tiende a a
Es decir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq n = f(a)$

La discontinuidad se puede eliminar redefiniendo a la función de tal manera que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a)$

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 2 \\ 2x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Se puede quitar la discontinuidad redefiniendo la función en $x=2$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 2 \\ 2x^2 & \text{si } x < 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se redefine

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Existen funciones donde la discontinuidad no se puede eliminar, como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

El límite no existe y no se puede eliminar la discontinuidad

21/09/2018

Continuidad en un intervalo abierto y cerrado

Continuidad de una función en un intervalo abierto:

Una función es continua en (a, b) o $(a, b) \cup (b, c) \cup (c, d)$ si y solo si es continua en cada punto del intervalo

Decimos que $f(x)$ es continua en (A, B) si y solo si $f(x)$ es continua en $x \in (a, b)$

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Analizemos la continuidad de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$

en el intervalo $(-6, 0)$

$$f(x) = \frac{x}{(x+3)(x+2)} \quad x \neq -3, x \neq -2$$

La función no es continua en el intervalo $(-6, 0)$ pero sí lo es en $(-6, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, 0)$

La función $P(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$
Es continua en todo su dominio

Continuidad de una función en un intervalo cerrado:

Una función es continua en un intervalo $[a, b]$ si y sólo si es continua en (a, b) y es continua a la derecha de a e izquierda de b , esto es

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K = f(b)$$

Ejemplo:

La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en $(-2, 2)$ y es continua a la derecha de -2 y a la izquierda de 2

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 = f(-2) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 = f(2)$$

Continua a la derecha
de -2

Continua a la izquierda
de 2

Ejemplo:

$$f(x) = |x|$$

De $[-5, 5]$

Es continua en $(-5, 5)$

Es continua a la derecha e izquierda de -5
y 5 respectivamente

Ejercicio

Analice si la función es continua en $[0, 2]$ para

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

No es continua

Ejercicio

a) Verifique si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ es continua en $[-2, 2]$

No es continua

Es en $(-2, 2)$ pero el $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \neq g(2)$

b) Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Verificar si es continua de

$[-\frac{1}{2}, 2]$

No

$[0, 1]$

No

$[0, 3]$

No

24/09/2018

Teorema

Una función polinomial es continua para todo número real c

Una función racional es continua para todo número real c de su dominio, es decir, con excepción de los puntos en los que su denominador es cero

La función $f(x) = |x|$ es continua en todo su dominio

Si n es impar $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua para todo real c

Si es par sólo será para todo real positivo

Continuidad en Operaciones con Funciones

Si f y g son continuas en c también serán continuas en c Kf (Producto escalar) $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ siempre que $g \neq 0$

Teorema del Valor Intermedio

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y K un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número x_0 en el intervalo $[a, b]$ que satisfaga $f(x_0) = K$.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \sqrt{4x-3}$ y sea c el valor que satisfaga $f(c) = \sqrt{5}$ encuentre $c \in [1, 3]$.

Solución

$$\begin{aligned} f(c) &= \sqrt{4c-3} \\ \sqrt{5} &= \sqrt{4c-3} \\ 5 &= 4c-3 \\ 2 &= c \end{aligned}$$

Ejemplo:

Sea $f(x) = 2x+3$ y sea c el valor que satisfaga $f(c) = 6$ encontrar $c \in [-1, 3]$.

Solución

$$\begin{aligned} f(c) &= 2c+3 \\ 6 &= 2c+3 \\ c &= 1.5 \end{aligned}$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(3) = 9$$

Ejercicio

Verifiquemos que en la función continua $f(x) = 2x^2$ en $[0, 5]$ existe un c tal que $f(c) = 8$

$$f(c) = 2c^2$$

$$8 = 2c^2$$

$$4 = c^2$$

$$c = \pm \sqrt{4}$$

$$c = \pm 2 \quad \therefore c = 2 \quad 2 \in [0, 5]$$

Graficamete

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 8$$

$$f(5) = 50$$

Sea $f(x) = x^2 - 5x + 6$ verificar que hay una raíz en $[0, 2.5]$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$(x - 3)(x - 2)$$

$$x = 3$$

$$x = 2 \rightarrow x = 2$$

Tarea

Encuentra el valor de c en $[-1, 2]$ tal que $f(c) = 7$ donde $f(x) = 2x - 1$

$$x^2 - 7x + 10 \quad f(c) = 10$$

Límite al infinito

Demuestra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$

Usamos un truco común dividiendo el denominador y numerador entre las potencias más altas que aparecen en la fracción

$$\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

Por $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \rightarrow \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 5}{4x^2 + x - 1}$$

$$\frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

02/10/2018

Límites Infinitos

Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$$

Relación con las Asíntotas

La recta $x=c$ es una asíntota vertical de la gráfica $y=f(x)$ si cualquiera de las 4 proposiciones son verdaderas:

~~1~~ - $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$

~~2~~ - $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$

Asíntotas

Calcular asíntota horizontal

$$\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Encontrar asíntotas verticales

a) $\frac{2}{x^2 - 4x + 4}$

b) $\frac{3}{x-1}$

$$c) \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$d) \frac{x^2-5}{x^2-4}$$

$$e) \frac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$$

A. horizon.

A. vert.

Cortes en x: $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$

Corte en y: 1.25

A hor.

A. vert.

Cortes en x: No hay

Corte en y: 0.5

$$\frac{1}{1-x^2} = 1$$

$$-2, 2$$

$$\text{Term. } x^2 \quad \frac{2}{1} = 2$$

$$1, 2$$

Tarea

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-9}$$

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-7x+10}$$

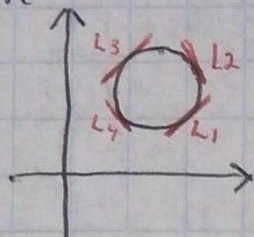
03/10/2018

04/10/2018

Unidad 3: La Derivada

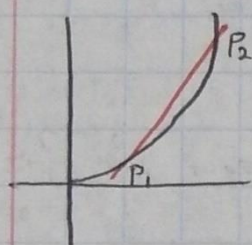
La recta tangente

Gráficamente



L_1, L_2, L_3, L_4 son rectas tangentes del círculo

Watcha: Tener en cuenta esto:



La secante
toca dos
puntos

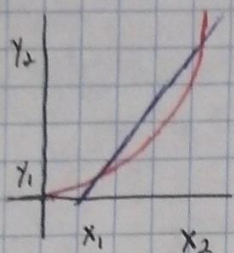
Unidad 1: Funciones

Aprendizajes Esperados:

- Catálogo de la gráfica de ecuaciones básicas para el desarrollo de los conceptos del Cálculo:
 - Rectas
 - Parábolas
 - Circunferencias
 - Semicircunferencias
 - Semiparábolas
 - Hipérbolas $y = 1/x$
 - Polinomial $y = x^3$
- Traslación horizontal y vertical de la gráfica de las ecuaciones básicas
- Concepto de función como regla de correspondencia (Definición informal)
 - Definición y gráfica. Dominio, rango y su distinción con el contradominio
- Traslación horizontal y vertical de la gráfica de funciones
- Operaciones con funciones: Suma, resta, producto, cociente y composición
- Tipos de funciones: Identidad, constante, lineal, algebraicas, polinomial
- Graficación y evaluación de funciones con Software Matemático

08/10/2018

Definición de la Derivada por medio de la Tangente



$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x}$$

Como $y_2 = f(x_2)$ y $y_1 = f(x_1)$ entonces

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow x_2 = \Delta x + x_1 \therefore$

$$m_{sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si ese cambio se acerca a 0 la secante se hará tangente $\therefore$

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejercicio

Encuentra la pendiente de la tangente de $f(x) = 2x^2 + 1$ en $x=1$, $x \neq 0$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

$$\frac{2(x + \Delta x)^2 + 1 - 2x^2 - 1}{\Delta x}$$

$$\frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 1 - 2x^2 - 1}{\Delta x}$$

$$\frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} = 4x$$

Para $x=0$ Para $x=1$

pendiente = 0

m = 4

$$\theta = \tan^{-1} 0 = 0^\circ$$

$$\theta = \tan^{-1} 4 = 75.9^\circ$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Ecuación de la recta punto pendiente

En $x=0$ $P(0, 1)$

En $x=1$ $P(1, 3)$

$$y - 1 = 0(x - 0) \rightarrow y = 1$$

$$y - 3 = 4(x - 1) \rightarrow y = 4x - 1$$

09/10/2018

Definición de Derivada

Sea $f(x)$ una función continua entonces su derivada es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejercicio: Encuentre la derivada:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$\frac{\frac{1}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$\frac{-h}{h x(x+h)} = \frac{-1}{x^2+xh}$$

$$-\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} c) & \frac{2x^3+3x^2+2}{h} \\ & \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)+3(x^2+2xh+h^2)+2-2x^3-3x^2-2}{h} \\ & \frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3+3x^2+6xh+3h^2+2-2x^3-3x^2-2}{h} \\ & \frac{6x^2h+6xh^2+2h^3+6xh+3h^2}{h} \\ & \frac{h(6x^2+6xh+2h^2+6x+3h)}{h} = 6x^2+6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) & \frac{2x^2-3x+4}{h} \\ & \frac{2(x^2+2xh+h^2)-3(x+h)+4-2x^2+3x-4}{h} \\ & \frac{2x^2+4xh+2h^2-3x-3h+4-2x^2+3x-4}{h} \\ & \frac{h(4x+2h-3)}{h} = 4x-3 \end{aligned}$$

La Derivada como límite de razones de cambio

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Por analogía con la velocidad consideramos el promedio de rapidez de cambio en intervalos cada vez más pequeños al hacer que x_2 se aproxime a x_1 y haciendo que Δx tienda a 0. El límite de estos promedios de cambio recibe el nombre de rapidez de cambio instantáneo de y con respecto a x en $x=x_1$ que se interpreta como la pendiente de la recta tangente

12/10/2018

Ejercicio

El desplazamiento de una partícula está dado por $s = t^2 - 8t + 18$ medido en segundos

a) Encuentra el promedio de velocidad en cada intervalo

i) $[3, 4]$

ii) $[3.5, 4]$

iii) $[4, 5]$

iv) $[4, 4.5]$

b) Encuentra la velocidad instantánea en $t=3$ y $t=4$

a) i) $V_{prom} =$

$s(3) = 3$

$s(4) = 2$

$V_{prom} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3}$

$\frac{2 - 3}{4 - 3} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ m/s}$

ii) $s(4) = 2$

$s(3.5) = 2.25$

$V_{prom} = \frac{s(4) - s(3.5)}{4 - 3.5}$

$\frac{2 - 2.25}{4 - 3.5} = \frac{-0.25}{0.5} = -0.5 \text{ m/s}$

iii) $s(5) = 3$

$s(4) = 2$

$V_{prom} = \frac{s(5) - s(4)}{5 - 4}$

$\frac{3 - 2}{5 - 4} = \frac{1}{1} = 1 \text{ m/s}$

iv) $s(4.5) = 2.25$

$s(4) = 2$

$V_{prom} = \frac{s(4.5) - s(4)}{4.5 - 4}$

$\frac{2.25 - 2}{4.5 - 4} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \text{ m/s}$

b) $f(x) = t^2 - 8t + 18$

$f'(x) = 2t - 8$

$t=3 = -2$

$t=4 = 0$

El proceso de sacar la derivada es diferenciación

Nota

Se dice que una función $f(x)$ es derivable en a si $f'(a)$ existe

La relación que existe entre la derivabilidad y continuidad es una función que es derivable en a es continua en a

Ejemplo La función valor absoluto $f(x) = |x|$

$f'(0)$ no existe

Pero como, si es continua en 0 ¿que pasa?

Nota: Con esta grafica se analiza que una función que es continua en un punto a , no necesariamente es derivable

Watch

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } |h| &= h \text{ si } h > 0 \\ \text{y } |h| &= -h \text{ si } h < 0 \\ \text{entonces } \frac{-h}{h} &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{Ahora } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Sus derivadas no coinciden y deberían de coincidir

? Nota En los picos la derivada no existe, discontinuidad tangente y tangentes verticales

16/10/2018

Notación de la Derivada

Puede expresarse de las formas:
 $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, y' , $D_x y$

Reglas de Derivación

1- $\frac{d(c)}{dx} = 0$

6- $\frac{d(f \cdot g)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$

2- $\frac{d(x)}{dx} = 1$

7- $\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$

3- $\frac{d(c \cdot x)}{dx} = c \frac{d(x)}{dx}$

8- $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

4- $\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}$

9- $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$

5- $\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

Ejercicio: Encuentra las derivadas

a) $y = 5$

$y' = 0$

h) $y = x^9$ $y' = 9x^8$

b) $y = 8$

$y' = 0$

i) $y = \frac{1}{x^4}$ $y' = -\frac{4}{x^5}$

c) $y = x$

$y' = 1$

j) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ $y' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

d) $y = 3x$

$y' = 3$

k) $y = 2x^4 - 3x^2$ $y' = 8x^3 - 6x$

e) $y = -5x$

$y' = -5$

l) $y = -5x^3 + 5x^2 - 9x + 3$ $y' = -15x^2 + 10x - 9$

f) $y = 8x$

$y' = 8$

m) $y = (x+1)x^2$ $y' = 1 \cdot x^2 + 2x(x+1)$

g) $y = x^2$

$y' = 2x$

n) $y = (2x+3)(1-9x)$ $y' = -9(2x+3) + 2(1-9x)$

$$\frac{3-1}{2-1} = 2 \quad \frac{1}{1} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$$

a) $y = (x+1)(x^2-3)$ $y' = 2x(x+1) + 1(x^2-3)$
 c) $y = \frac{x-2}{x^2+1}$ $y' = \frac{(x^2+1)(1) + (x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$

p) $y = \frac{2x+4}{1-9x}$ $y' = \frac{(1-9x)(2) + (2x+4)(-9)}{(1-9x)^2}$

q) $y = 2x^2 + \frac{1}{x^3} + 2e^x + \ln x$ $y' = 4x - \frac{3}{x^4} + 2e^x + \frac{1}{x}$

r) $y = 5 \ln x + 8 \ln x + 9e^x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $y' = \frac{5}{x} + \frac{8}{x} + 9e^x + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

17/10/2018

Derivadas de Funciones Trigonométricas

1- $\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x$

4- $\frac{d(\cot x)}{dx} = -\operatorname{csc}^2 x$

2- $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x$

5- $\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x$

3- $\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$

6- $\frac{d(\csc x)}{dx} = -\csc x \cot x$

Derivar

1- $y = 2x^2 - \cos x + 3 \operatorname{sen} x$
 $y' = 4x - (-\operatorname{sen} x) + 3 \cos x$
 $y' = 4x + \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

2- $y = \frac{e^x}{4} - 5 \ln x + \tan x$
 $y' = \frac{e^x}{4} - \frac{5}{x} + \sec^2 x$

3- $y = \csc x + \frac{1}{x^3}$
 $y' = -\csc x \cot x - \frac{3}{x^4}$

4- $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x}$
 $y' = \frac{\tan x (\cos x) - \operatorname{sen} x (\sec^2 x)}{\tan^2 x}$

$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x = 1$ Para simplificar

$$\frac{\tan x (\cos x)}{\tan^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x (\sec^2 x)}{\tan^2 x}$$

$$\frac{\cos x}{\tan x} - \frac{\operatorname{sen} x \sec^2 x}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{\cos x}{\tan x} - \frac{\operatorname{sen} x \sec^2 x \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{\cos x}{\tan x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\rightarrow \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\rightarrow -\operatorname{sen} x$$

Regla de la Cadena

Sea $f(u)$ una función que depende de u y $u(x)$ una función que depende de x entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

$$f(u) = u^2 - 2 \quad y \quad u = 5x + 3$$

$$(5x + 3)^2 - 2$$

$$2(5x + 3) \cdot 5$$

$$10(5x + 3)$$

$$50x + 30$$

Ejemplo $f(u) = u^3 - u^2 + 1 \quad y \quad u = 5x$

$$(5x)^3 - (5x)^2 + 1$$

$$3(5x) \cdot 5 - 2(5x) \cdot 5$$

$$75x^2 - 10x \cdot 5$$

$$75x^2 - 50x$$

! Se supone $f'(x) = 375x^2 - 50x$

Usando las de trigonometría

$$y = \sin u$$

$$y' = u' \cos u$$

$$y = \cos u$$

$$y' = u' \cdot -\sin u$$

$$y = \tan u$$

$$y' = u' \sec^2 u$$

$$y = \cot u$$

$$y' = u' \csc^2 u$$

$$y = \sec u$$

$$y' = u' \sec u \tan u$$

$$y = \csc u$$

$$y' = u' \csc u \cot u$$

Ejemplo

$$y = \sin(8x-1) + \cos(x^2+x) + x^2$$

$$y' = 8(\cos(8x-1)) + 2x+1(-\sin(x^2+x)) + 2x$$

$$y' = 8\cos(8x-1) - (2x+1)(\sin(x^2+x)) + 2x$$

Ejemplo

$$y = \tan\left(\frac{2x-1}{x}\right)$$

$$y = \tan\left(\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$y = \tan\left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \cdot \sec^2\left(\frac{2x-1}{x}\right) \rightarrow \frac{\sec^2\left(\frac{2x-1}{x}\right)}{x^2}$$

Ejemplo

$$y = \cot(\sqrt{x}) + \sec(\sqrt{x})$$

$$y = \cot(x^{1/2}) + \sec(x^{1/2})$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \csc^2 \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x}))$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} (\csc^2 \sqrt{x} + \sec \sqrt{x} \cdot \tan \sqrt{x})$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \csc((x+1)(2x+3))$$

$$y' = \csc((x+1)(2x+3)) \cdot \cot((x+1)(2x+3)) \cdot (2(x+1) + 1(2x+3))$$

$$y' = \csc((x+1)(2x+3)) \cdot \cot((x+1)(2x+3)) \cdot (2x+2+2x+3)$$

$$y' = (4x+5) \cdot \csc((x+1)(2x+3)) \cdot \cot((x+1)(2x+3))$$

Derivada de una función Potencia

Sea n un número real y $u(x)$ una función derivable donde

$$y = (u(x))^n$$

Su derivada es

$$y' = n(u(x))^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

$$y = (3x^2 + 5x + 3)^{20}$$

$$y' = 20(3x^2 + 5x + 3)^{19} \cdot 6x + 5$$

$$y = \sqrt[5]{(8x^2 + 1)^6}$$

$$y' = (8x^2 + 1)^{6/5}$$

$$y' = \frac{6}{5} (8x^2 + 1)^{1/5} \cdot 16x$$

$$y' = \frac{96}{5} x \cdot (8x^2 + 1)^{1/5}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5x+3}}$$

$$(5x+3)^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (5x+3)^{-3/2} \cdot 5$$

$$= -\frac{5}{2 \cdot \sqrt{(5x+3)^3}}$$

$$y = (2x+1)^5 (x^2+x+1)^{10}$$

Pendiente

Derivación Implícita

Todo lo que hemos hecho es explícito

Algunas funciones están implícitas cuando y no se representa en términos de x y no es posible ~~para~~ acomodar la función a dichos términos

En ocasiones no es fácil despejar a y y por ello se recurre a esta forma de derivar

Ejemplo

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2 = 25)$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$2y \cdot y' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y}$$

$$y' = \frac{-x}{y}$$

$$\text{sen } x^2 \quad 7xy^3 \quad 2x^2 \text{sen } x$$

$$7x(3y^2 y') + 7(y^3)$$

$$21xy^2 y'$$

Ejemplo

$$x^2 y + x^3 y^3 + 3y = 8x$$

$$x^2 y' + y(2x) + x^3(3y^2 y') + y^3(3x^2) + 3y' = 8$$

$$x^2 y' + 2xy + 3x^3 y^2 y' + 3x^2 y^3 + 3y' = 8$$

$$x^2 y' + 3x^3 y^2 y' + 3y' = -2xy - 3x^2 y^3 + 8$$

$$y'(x^2 + 3x^3 y^2 + 3) = -2xy - 3x^2 y^3 + 8$$

$$y' = \frac{-2xy - 3x^2 y^3 + 8}{x^2 + 3x^3 y^2 + 3}$$

Ejercicio

a) $x^2 + xy - y^2 = 4$

$$2x + (1)(y) + (x)(y') - 2yy' = 0$$

$$2x + y + xy' - 2yy' = 0$$

$$2x + y = -xy' + 2yy'$$

$$2x + y = (-x + 2y)y'$$

$$\frac{2x + y}{-x + 2y} = y'$$

b) $4 \cos x \sin y = 1$

$$4[(-\sin x)(\sin y) + (\cos x)(\cos y \cdot y')] = 0$$

$$4(-\sin x)(\sin y) + 4(\cos x)(\cos y \cdot y') = 0$$

$$4(-\sin x)(\sin y) = y'$$

$$-4(\cos x)(\cos y) = y'$$

$$\tan x \cdot \tan y = y'$$

22/10/2018

Derive Implicitamente

$$\cos(2x + 3y^2) + \tan(2y + 1) = 8$$

$$2 + 6y \cdot y' \cdot (-\sin(2x + 3y^2)) + 2y'(\sec^2(2y + 1)) = 0$$

$$2 + 6yy'(-\sin(2x + 3y^2)) + 2y'(\sec^2(2y + 1)) = 0$$

$$-2\sin(2x + 3y^2) - 6yy'(\sin(2x + 3y^2)) + 2y'(\sec^2(2y + 1)) = 0$$

$$y' = \frac{2 \sin(2x + 3y^2)}{-6y \sin(2x + 3y^2) + 2 \sec^2(2y + 1)}$$

5. $(7xy^3 + 2 \sec(8x^3 + y^3)) = 2y^2$

$$7y^3 + 21xy^2 y' + (2)(24x^2 + 3y^2 y')(\sec(8x^3 + y^3))(\tan(8x^3 + y^3)) = 4y y'$$

$$7y^3 + 21xy^2 y' + (48x^2 + 6y^2 y') \cdot [\sec(8x^3 + y^3)] [\tan(8x^3 + y^3)] = 4y y'$$

$$7y^3 + 21xy^2 y' + 48x^2 [\text{ñe}] + 6y^2 y' [\text{ñe}] = 4y y'$$

$$21xy^2 y' + 6y^2 y' [\text{ñe}] - 4y y' = -7y^3 - 48x^2 [\text{ñe}]$$

$$y'(21xy^2 + 6y^2 [\text{ñe}] - 4y) = -7y^3 - 48x^2 [\text{ñe}]$$

$$y' = \frac{-7y^3 - 48x^2 [\text{ñe}]}{21xy^2 + 6y^2 [\text{ñe}] - 4y}$$

Derivadas de Orden Superior

Sea $f(x)$ una función derivable y su derivada es $f'(x)$ donde también es derivable y su derivada es $f''(x)$ y así hasta llegar a la n -ésima derivada de la función $f^{(n)}(x)$

$$f(x)$$

$$f'(x)$$

$$f''(x)$$

$$f^{(n)}(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y^{(n)}$$

$$D_x y$$

$$D_x^2 y$$

$$D_x^n y$$

Ejemplos: Sea $y = 8x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ hallar $f^{(5)}(x)$

$$f'(x) = 40x^4 + 36x^3 - 18x^2 + 4x + 3$$

$$f''(x) = 160x^3 + 108x^2 - 36x + 4$$

$$f'''(x) = 480x^2 + 216x - 36$$

$$f^{(4)}(x) = 960x + 216$$

$$f^{(5)}(x) = 960$$

24/10/2018

Derivar

hallar

$$y = \sin(x^2 + 3)$$

$$y' = 2x \cdot \cos(x^2 + 3)$$

$$y'' = 2x \cdot (-2x \sin(x^2 + 3)) + 2 \sin(x^2 + 3)$$

$$y'' = -4x^2 \sin(x^2 + 3) + 2 \sin(x^2 + 3)$$

$$y''' = -4x^2 (2x \cos(x^2 + 3)) + (-8x) \sin(x^2 + 3) + 4x \sin(x^2 + 3)$$

$$y''' = -8x^3 \cos(x^2 + 3) - 8x \sin(x^2 + 3) + 4x \sin(x^2 + 3)$$

$$y''' = -8x^3 \cos(x^2 + 3) - 4x \sin(x^2 + 3)$$

$$y''' = -4x (2x^2 \cos(x^2 + 3) + \sin(x^2 + 3))$$

$$x^2 + 3x^2 y^2 + 2y = x^3$$

Hallar

$$y''$$

$$2x + 3x^2(2y'y) + y^2(6x) + 2y' = 3x^2$$

$$2x + 6x^2 y'y + 6xy^2 + 2y' = 3x^2$$

$$6x^2 y'y + 2y' = 3x^2 - 2x - 6xy^2$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 6xy^2}{6x^2 y + 2}$$

$$y'' = \frac{(6x^2 y + 2)(6x - 2 + 6y^2 + 12xyy') - (3x^2 - 2x - 6xy^2)(6x^2 y + 12xyy')}{(6x^2 y + 2)^2}$$

$$6xy^2 = 6y^2 + 12xy'y$$

$$6x^2 y = 6x^2 y' + 12xy$$

25/10/2018

Sea hallar $x^2 + y^2 = 4$
 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ 2x + 2yy' &= 0 \\ 2yy' &= -2x \\ y' &= -\frac{x}{y} \\ y'' &= \frac{y(-1) - (-x)y'}{y^2} \\ y'' &= \frac{-y + xy'}{y^2} \\ y'' &= \frac{-y + x(-\frac{x}{y})}{y^2} \rightarrow y'' = \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2} \\ y'' &= \frac{-x^2 - y^2}{y^3} \rightarrow -\frac{(x^2 + y^2)}{y^3} \end{aligned}$$

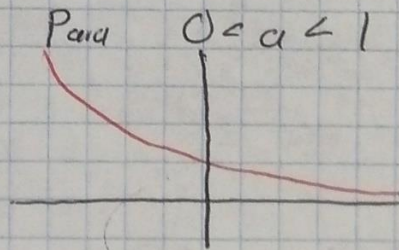
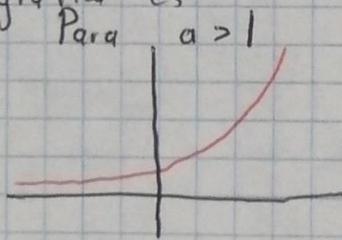
Unidad IV Otras Funciones Trascendentes

Función exponencial Derivado y Gráfica

Definición

Una función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$ donde a es la base con $0 < a < 1$ y $a > 1$.
 Su dominio son todos los reales y el rango son los reales positivos.

Su gráfica es



Existe la función exponencial natural: $f(x) = e^x$

Sea $y = a^x$ entonces $\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$

Si la función exponencial está compuesta por otra función $y = a^u$ entonces se usa la regla de la cadena.
 Esto es $\frac{dy}{dx} = a^u \ln u \cdot \frac{du}{dx}$

o bien $y' = a^u \ln u \cdot u'$

Ejemplo

1- $y = 3^x \rightarrow 3^x \ln 3$

2- $y = 2^x \rightarrow 2^x \ln 2$

3- $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$3x+1=y$
 $3y+1=2x$
 $3y=x-1$
 $y=\frac{x-1}{3}$

Ejemplo

$$1- y = 3^{5x^2+6x} \\ y' = 3^{5x^2+6x} \cdot \ln 3 \cdot (10x+6)$$

$$2- y = 8^{\frac{x^2}{7}+1} \\ y' = 8^{\frac{x^2}{7}+1} \cdot \ln(8^{\frac{x^2}{7}+1}) \cdot \frac{2}{7}x$$

Derivada de una función exponencial natural
 sea $y = e^x$
 $y = e^u$

$$y' = e^x \\ y' = e^u \cdot u'$$

31/10/2018

Función Inversa

Sea f una función con dominio A y rango B . Entonces su función inversa tiene de dominio B y rango A .

No confundir el -1 de f^{-1} con un exponente así:
 $f^{-1}(x)$ no es $\frac{1}{f(x)}$

Pasos para hallar la inversa
 Cambiar x y y
 Despejar

Si la función no es inyectiva no se puede hallar

Ejemplo

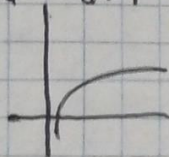
$$y = x^3 + 2 \\ x = \sqrt[3]{y-2} \\ x-2 = \frac{y}{3} \\ \sqrt[3]{x-2} = y$$

5/11/2018

Definición de Función Logarítmica

La función logarítmica se define como $y = \log_a x$ donde a es la base y $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

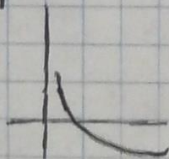
Su gráfica para $a > 1$ es



La función crece

! Dominio $x > 0$ o bien $x \in (0, +\infty)$
 ! Rango $y \in \mathbb{R}$ $y > \log_a 0$

Para $0 < a < 1$



La función decrece

! Dominio $x > 0$
 ! Rango $y \in \mathbb{R}$

La función logarítmica es la inversa de la exponencial
 $y = \log_a x \iff x = a^y$

Conversiones

$$\log_a X = y$$

$$a^y = X$$

$$\log_4 2 = 1/2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

Ejercicio

Gráficas

$$y = \log_3 X$$

$$y = \log_2 X$$

Le daremos valores a "y" con su inversa:

x	y
1/9	-2
1/3	-1
1	0
3	1
9	2

Si graficamos $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
4	-2
2	-1
1	0
1/2	1
1/4	2

06/11/2018

Propiedades del logaritmo

1- $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$

2- $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

3- $\log_a u^n = n \log_a u$

4- $\log_a a^x = x$

5- $\log_a 1 = 0$

Derivada de la Función Logarítmica

a) $y = \log_a x$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

Ejercicio $y = \log \frac{2x+3}{(5x+8)^2}$

Ejercicio Derivar $y = \log_3 (2x+1)(6x-3)$

07/11/2018

$$y = \log_3 (2x+1) + \log_3 (6x-3)$$

$$y' = \frac{2}{\ln 3 \cdot (2x+1)} + \frac{6}{\ln 3 \cdot (6x-3)}$$

$$y' = \frac{2}{\ln 3} \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{3}{6x-3} \right)$$

$$y' = \frac{2}{\ln 3} \left[\frac{(6x-3) + 3(2x+1)}{(2x+1)(6x-3)} \right]$$

$$y' = \frac{2}{\ln 3} \left[\frac{12x}{(2x+1)(6x-3)} \right]$$

Otra Forma

Si aplicamos propiedades de los logaritmos

$$y' = \frac{1}{(2x+1)(6x-3) \cdot \ln 3} \cdot \frac{d}{dx} (2x+1)(6x-3)$$

$$y' = \frac{1}{(2x+1)(6x-3) \cdot \ln 3} \cdot [(2x+1)6 + (6x-3)2]$$

$$y' = \frac{12x+6+12x-6}{(2x+1)(6x-3) \ln 3} = \frac{24}{(2x+1)(6x-3) \ln 3}$$

Derivada de la Función Logaritmo Natural

Si $y = \ln x$
 $y' = \frac{1}{x}$

entonces $y = \ln u$
 $y' = \frac{u'}{u}$

Ejemplo $y = \ln (8x-4)$ $y' = \frac{8}{8x-4}$

Derivar $y = \ln \sqrt[3]{(2x^2+1)^2}$

Derivar $y = \ln(9x^2 + 6x - 3)$
 $y' = \frac{18x + 6}{9x^2 + 6x - 3}$

Derivar $y = \ln\left(\frac{7x+1}{8x-3}\right)$
 $\frac{\ln(7x+1)}{7x+1} - \frac{\ln(8x-3)}{8x-3}$

Derivar
 a) $y = \ln(10x+1)^{10} \cdot 3x$
 $\ln(10x+1)^{10} + \ln 3x$
 $10 \cdot \ln(10x+1) + \ln 3x$
 $\frac{100}{10x+1} + \frac{3}{3x}$

b) $y = \log_5(8x^3 + 2x - 3)$
 $y' = \frac{24x^2 + 2}{(8x^3 + 2x - 3) \cdot \ln 5}$

08/11/2018

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1- $y = \sin^{-1} x$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- $y = \cos^{-1} x$

$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $y = \tan^{-1} x$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$

4- $y = \cot^{-1} x$

$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

5- $y = \sec^{-1} x$

$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6- $y = \csc^{-1} x$

$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

1- $y = \sin^{-1} u$

$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

2- $y = \cos^{-1} u$

$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3- $y = \tan^{-1} u$

$y' = \frac{u'}{1+u^2}$

4- $y = \cot^{-1} u$

$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

5- $y = \sec^{-1} u$

$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

6- $y = \csc^{-1} u$

$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

Ejercicio

Derivar

$$a) \quad y = 8x^2 + \cos 5x - \sin^{-1} x$$

$$y' = 16x - 5 \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) \quad y = (\cos^{-1} x)^3$$

$$y' = 3 (\cos^{-1} x)^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$c) \quad y = \frac{\tan^{-1} x}{x^2 - 1}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1) \left(\frac{1}{1+x^2} \right) - 2x \tan^{-1} x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$d) \quad y = 2 \cot^{-1} x$$

$$y' = \frac{-2}{1+x^2}$$

$$e) \quad y = 4 \csc^{-1} x - 2 \sec^{-1} x$$

$$y' = \frac{-4}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{2}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{-6}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$f) \quad y = \sin^{-1} (8x^2 + 1)$$

$$y' = \frac{16x}{\sqrt{1-(8x^2+1)^2}}$$

$$g) \quad y = \cos^{-1} (8x - 3)$$

$$y' = \frac{-8}{\sqrt{1-(8x-3)^2}}$$

$$h) \quad y = \tan^{-1} (3x)$$

$$y' = \frac{3}{1+(3x)^2}$$

$$i) \quad y = \cot^{-1} (5x^2)$$

$$y' = \frac{-10x}{1+25x^4}$$

$$j) \quad y = \sec^{-1} (e^x)$$

$$y' = \frac{e^x}{e^x \sqrt{e^{2x}-1}}$$

09/11/2018

Funciones Hiperbólicas

Se basan en la función exponencial $y = e^x$

Se representan:

$$\bullet \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

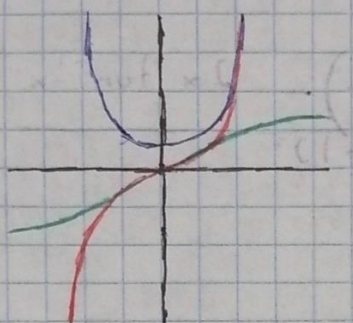
$$\bullet \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\bullet \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\bullet \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\bullet \operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Gráficas



$\sinh$
 $\cosh$
 $\tanh$

Derivadas

$$\bullet \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{coth} x \operatorname{csch} x$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\tanh x \operatorname{sech} x$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \operatorname{coth} x = -\operatorname{csch}^2 x$$

Derivar

$$= 5x \sinh x$$

15/11/2018

Unidad V Aplicaciones de la Derivada

Función Creciente y Decreciente

Una función $y = f(x)$ es creciente si y aumenta cuando x aumenta

Es decreciente si y disminuye cuando aumenta x

Máximos y Mínimos Relativos de una Función

Máximo relativo o local es de un intervalo

Uno global es de toda la función

Se hallan máximos y mínimos con la primera derivada y la segunda derivada

16/11/2018

Ejercicio

Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores críticos y puntos críticos de la función, hallar máximos y mínimos

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2$$

$$f'(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$0 = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$x(x^2 - 5x + 6)$$

$$x(x-3)(x-2)$$

Valores críticos

$$x=0, x=3, x=2$$

Puntos críticos

$$(0, 0)$$

$$(3, 2.25)$$

$$(2, 2.6)$$

$$f''(x) = 3x^2 - 10x + 6$$

Para 0

= 6

→ Mínima

2

= -2

→ Máxima

3

= 3

→ Mínima

Hacer lo mismo para $g(x) = x^4 - 3x^3$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

$$x(4x^2 - 9x)$$

19/11/2018

Criterio de la Primera Derivada

Paso 1: Se halla la primera derivada de la función

Paso 2: Se iguala esa cosa a 0 y se hallan las raíces reales. Estos son los valores críticos de la variable

Paso 3: Se consideran los valores críticos por separado y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor y otro mayor (o usamos la segunda derivada si).

Si el signo de la derivada es + para el menor es + y el mayor es -, es un máximo, al contrario será un mínimo. Si el signo no cambia, no es ni máximo ni mínimo

Ejemplo: Calcular los máximos y mínimos de

$$f(x) = (x-1)^2 (x+1)^3$$

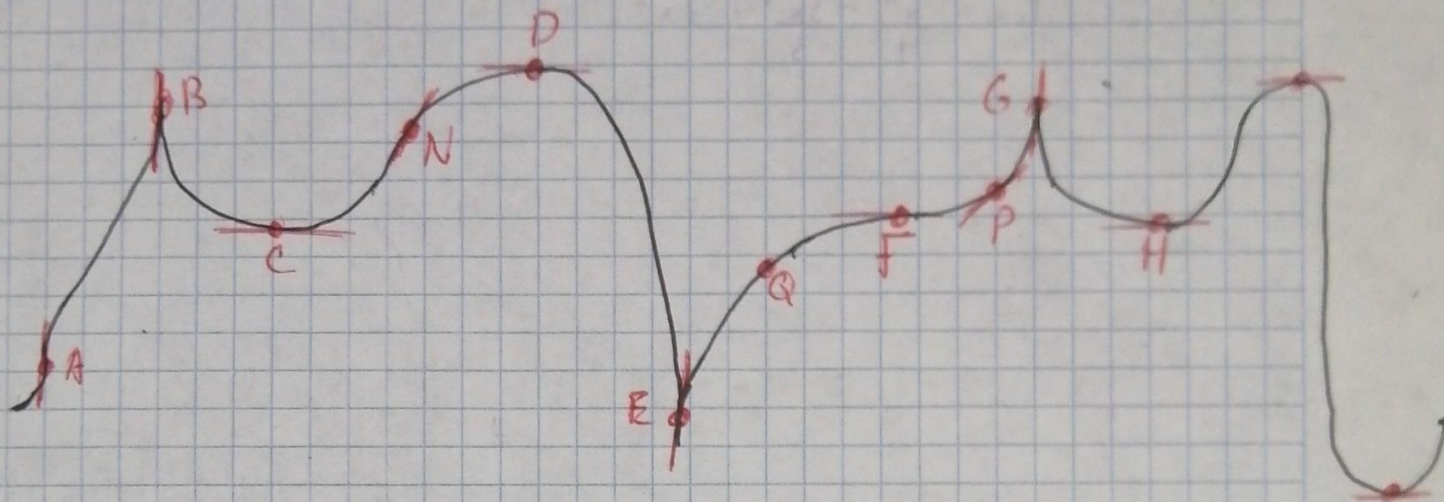
$$f'(x) = (x-1)^2 \cdot 3(x+1)^2 + 2(x-1)(x+1)^3$$

$$(x-1)(x-1)(3)(x+1)(x+1) + (2)(x-1)(x+1)(x+1)(x+1)$$

$$3(x^2-1)^2 + 2(x^2-1)(x+1)^2$$

$$(x+1)^3$$

Máximos y Mínimos cuando $f'(x)$ es infinito y $f(x)$ continua
Consideremos



En B o G $f(x)$ es continua y tiene máxima pero $f'(x)$ se vuelve infinita pues sus tangentes son paralelas al eje y.
En E $f(x)$ tiene mínimo y $f'(x)$ es infinita por tanto en la discusión todos los máximos y mínimos posibles, debemos incluir también como críticos los valores de x para los que $f'(x)$ es infinito o lo que es lo mismo los valores que satisfacen $\frac{1}{f'(x)} = 0$

Este paso se queda al criterio de la primera derivada

Determine los máximos y mínimos para $y = f(x) = x\sqrt{100-x^2}$

Obtener dominio

$$\begin{aligned} 100 - x^2 &\geq 0 \\ (10-x)(10+x) &\geq 0 \\ \{10-x \geq 0 \cap 10+x \geq 0\} \cup \{10-x \leq 0 \cap 10+x \leq 0\} \\ 10 \geq x &\quad x \geq -10 \quad 10 \leq x \quad x \leq -10 \\ [-10, 10] \end{aligned}$$

Concavidad

Se obtiene con la Segunda derivada, si es positiva es cóncava hacia arriba, si es negativa es cóncava hacia abajo

Un punto de inflexión es donde la concavidad cambia

Ejemplo: Para $3x^4 - 4x^2 + 1$ $12x^3 - 8x$ $36x^2 - 8 = 0$ $(6x)^2 - 8 = 0$

$$(6x + \sqrt{8})(6x - \sqrt{8}) = 0$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{8}}{6}$$

26/11/2018

Ejercicio Hallar máximos y mínimos, puntos de inflexión y concavidad para la función

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$$

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$y'' = 6x - 18$$

$$6(4) - 18$$

$$24 - 18$$

$$= 6$$

$\therefore U \leftarrow$

$$6(2) - 18$$

$$12 - 18$$

$$= -6$$

$\therefore \cap \leftarrow$

$$0 = 6x - 18$$

$$18 = 6x$$

$$3 = x$$

$$\rightarrow 0 = 3x^2 - 18x + 24$$

$$0 = 3(x^2 - 6x + 8)$$

$$0 = (x - 4)(x - 2)$$

$$x = 4$$

$$x = 2$$

4 $\rightarrow$ mínimo

2 $\rightarrow$ máximo

3 $\rightarrow$ p. inflexión

$(-\infty, 3)$ es cóncava hacia abajo

$(3, +\infty)$ es cóncava hacia arriba

Segunda Derivada

Pueden hallarse máximos y mínimos con la segunda derivada obteniendo su concavidad:

$f(x)$ es máximo si $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ es negativo

Si es positivo es mínimo

27/11/2018

Hallar los máximos y mínimos de $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

$$y' = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$y' = 3(x - 1)^2$$

$$0 = 3(x - 1)^2$$

$$x = 1, x = 1$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$6(1) - 6 = 0$$

$$0 = 6(x - 1)$$

Para

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$$

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$0 = 3(x^2 - 6x + 8)$$

$$0 = 3(x - 4)(x - 2)$$

$$y'' = 6x - 18$$

$$y'' = 6(4) - 18 = 6 \text{ min}$$

$$y'' = 6(2) - 18 = -6 \text{ max}$$

Extremos Absolutos en un Intervalo Cerrado
Lo más alto y más bajo de un intervalo
Su proceso es:

- 1- Hallar los valores críticos de f
- 2- Ver si están en el intervalo

Ejemplo: Hallar los valores críticos absolutos para
 $x^2 - 4x + 5$ en $[1, 4]$

$$f(2) = 1$$

$$f(4) = 5$$

Para $4x^3 + 3x^2 - 18x + 3$ en $[\frac{1}{2}, 3]$

$$y' = 12x^2 + 6x - 18$$

$$0 = 6(2x^2 + x - 3)$$

$$6 \left[\frac{4x^2 + (2)(1)x - 6}{2} \right]$$

$$6 \left[\frac{(2x + 3)(2x - 2)}{2} \right]$$

$$6(2x + 3)(x - 1)$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x = 1$$

→ mínimo

$$y'' = 24x + 6$$

$$f(\frac{1}{2}) = -6 + \frac{5}{4} = -7.5$$

$$f(3) = 84$$

$$f(1) = -8$$

max abs

min abs

Un fabricante de recipientes diseña una caja sin tapa con base cuadrada con un volumen de 32 ft^3 para que la caja requiera de una cantidad mínima de material ¿qué dimensiones debe tener la caja?

Volumen

$$32 = x^2 y$$

$$y = \frac{32}{x^2}$$

Area

$$A = x^2 + 4xy$$

$$A = x^2 + 4x \left(\frac{32}{x^2} \right) \rightarrow x^2 + \frac{128}{x}$$

Derivada

$$\frac{2x^3 - 128}{x^2} \rightarrow \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$$
$$\frac{2(x^2 - 4)(x^2 + 4x + 16)}{x^2}$$

Criticos

$$x = 4$$

Segunda derivada

$$2 + \frac{256}{x^3}$$

$$A = 48 \text{ ft}^2$$

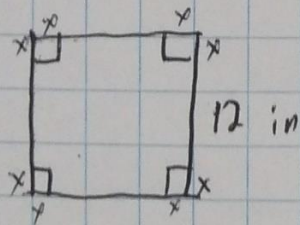
$$A = x^2 + 4xy$$

$$48 = 16 + 4 \cdot 4y$$

$$48 = 16 + 16y$$

$$18 = 16 + 16(y) \quad y = 2$$

Una caja sin tapa se hará con cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de 12 in de largo. Hallar la longitud del lado del cuadrado que debe cortarse para que el volumen de la caja sea máximo ¿cuál es el volumen máximo?



Cálculo Diferencial: Tarea

$$4- y = \arccos \frac{x}{a} \quad y' = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$5- y = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} \quad y' = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} = \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$7- y = \operatorname{arcsec} \frac{1}{x} \quad y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9- y = \arcsin \sqrt{x} \quad y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$11- y = x \arcsin 2x \quad y' = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \arcsin 2x$$

$$13- f(u) = u\sqrt{a^2-u^2} + a^2 \arcsin \frac{u}{a} \quad f'(u) = \frac{a^2-2u^2}{\sqrt{a^2-u^2}} + \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}} = \frac{a^2-2u^2+1}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$15- v = a^2 \arcsin \frac{u}{a} - u\sqrt{a^2-u^2} \quad \frac{\frac{a^2}{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}} - \frac{a^2-2u^2}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1-a^2+2u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$17- v = \arcsin \frac{u}{a} + \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} \quad \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} - \frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$19- \phi = \arctan \frac{ar}{1-ar} \quad \frac{1}{1+r^2}$$

$$21- y = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{1}{6} x^2 = x^2 \arctan x$$

$$23- y = x \arccos x, \quad x = -\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1-x^2} \arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} = 120.45^\circ \text{ ó } 2.54 \text{ rad}$$

$$25- y = \sqrt{x} \arctan \frac{x}{4}, \quad x=4 = \frac{16 \arctan \frac{x}{4} + x^2 \arctan \frac{x}{4} + 8x}{32\sqrt{x} + 2x^2\sqrt{x}} = -0.054 \text{ rad}$$

$$27- y = x^2 \operatorname{arccsc} \sqrt{x}, \quad x=2 = \frac{(4x \operatorname{arccsc} \sqrt{x})(\sqrt{x-1}-x)}{2\sqrt{x-1}} = 2.142 \text{ rad}$$

$$29- \arctan \frac{2}{x} = \frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2+4}$$

$$31- \frac{\operatorname{arccot} 2x}{x} = \frac{2x + \operatorname{arccot}(2x) + 4x^2 \operatorname{arccot}(2x)}{x^2 + 4x^4}$$

$$33- \operatorname{arcsec} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$35- \ln \arctan x = \frac{1}{(\arctan x) + x^2 \arctan x}$$

$$37- \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x}}{2x\sqrt{x-x^2}}$$

Hallar los máximos y mínimos

$$11- y = x \ln x \quad y' = 1 + \ln x$$

$$0 = 1 + \ln x$$

$$1 = \ln x \quad \therefore x = e$$

$$y'' = \frac{1}{x} \quad \therefore \text{Es mínimo}$$

Mínimo en (e, -e)

$$13- y = \ln(8x - x^2) \quad y' = \frac{8-2x}{8x-x^2}$$

Máximo en (4, \ln 16)

$$x = 4$$

$$y'' = \frac{-2x^2 + 16x - 64}{(8x - x^2)^2} \quad \therefore \text{Máximo}$$

$$17- Q = \frac{\sin \theta}{\theta} \quad \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}$$

$$19- y = \ln \sin ax \quad y' = a \cot ax$$

$$21- y = e^{ax} \sin bx \quad y' = e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$23- y = \ln \tan \frac{x}{2} \quad y' = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$$

$$27- Q = \frac{1}{3} \tan^3 \theta - \tan \theta + \theta \quad Q' = \tan^4 \theta$$

$$29- y = (\cos x)^x \quad y' = x (\ln \cos x - x \tan x)$$

Calcular máximos y mínimos

$$1- x^3 - 6x^2 + 9x \quad y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$(x-3)(x-1)$$

$$\begin{array}{c} | & + & | & - & | & + \\ \hline & 1 & - & 3 & + & 1 \end{array}$$

Máximo x = 1
Mínimo x = 3

$$3- 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4 \quad y' = 6x^2 + 6x + 12$$

$$(x-3)(x-4)$$

$$\begin{array}{c} | & - & | & - & | & - \\ \hline & 1 & - & 3 & - & 4 \end{array}$$

No tiene puntos máximos o mínimos

$$5 = 2x^2 - x^4$$

$$y = 4x - 4x^3$$

$$(x-1)(x-0)$$

$$x=1$$

$$x=0$$

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Mínimo } x=0$$

$$\text{Máximo } x=1$$

Aplicaciones de la Derivada

7-

$$A = bh$$

$$P = 2b + 3h$$

$$P = 2b + 3 \frac{A}{b}$$

$$P' = 2 - \frac{3A}{b^2}$$

$$0 = 2 - \frac{3A}{b^2}$$

$$b = \sqrt{2 - 3A}$$

$$9 = G = 375 - 3p - 500 + 15(375) + 15(3p) - \frac{1}{2}(375)^2$$

$$G' = -3p + 45 + 15 + 30$$

$$\frac{90}{3} = p \quad \therefore \underline{p = 30}$$

11-

$$x = 2500 - 20p$$

$$x' = -20$$

$$2500 - 400 = \underline{2100}$$