FORMULARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL VER.3.6

Jesús Rubí Miranda (jesusrubi1@yahoo.com)
http://mx.geocities.com/estadisticapapers/
http://mx.geocities.com/dicalculus/

VALOR ABSOLUTO

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|a| = |-a|$

$a \le |a|$ y $-a \le |a|$

$|a| \ge 0$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$|ab| = |a||b|$ ó $\left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n}|a_k|$

$|a+b| \le |a|+|b|$ ó $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k|$

EXPONENTES

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$(a^p)^q = a^{pq}$

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

LOGARITMOS

$\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a N^r = r\log_a N$

$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} = \frac{\ln N}{\ln a}$

$\log_{10} N = \log N$ y $\log_e N = \ln N$

ALGUNOS PRODUCTOS

$a \cdot (c+d) = ac + ad$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(x+b)\cdot(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$

$(ax+b)\cdot(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

$(a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4$

$(a-b)\cdot(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = a^5 - b^5$

$(a-b)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}\right) = a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

$(a+b)\cdot(a^3-a^2b+ab^2-b^3) = a^4 - b^4$

$(a+b)\cdot(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) = a^5 + b^5$

$(a+b)\cdot(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5) = a^6 - b^6$

$(a+b)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a^{n-k}b^{k-1}\right) = a^n + b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ impar

$(a+b)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a^{n-k}b^{k-1}\right) = a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ par

SUMAS Y PRODUCTOS

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k=1}^{n} c = nc$

$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$

$\sum_{k=1}^{n}[a + (k-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$

$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a-rl}{1-r}$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n^2 + n)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$

$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

$n! = \prod_{k=1}^{n} k$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k \le n$

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$

CONSTANTES

$\pi = 3.14159265359\ldots$

$e = 2.71828182846\ldots$

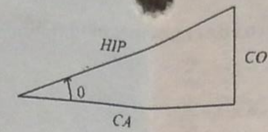
TRIGONOMETRÍA

$\operatorname{sen}\theta = \frac{CO}{HIP}$ $\quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

$\cos\theta = \frac{CA}{HIP}$ $\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{CO}{CA}$ $\quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$

π radianes=180°



θ	sen	cos	tg	ctg	sec	csc
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

$y = \angle\operatorname{sen} x \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \angle\cos x \quad y \in [0, \pi]$

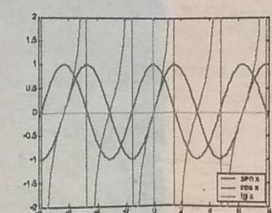
$y = \angle\operatorname{tg} x \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$y = \angle\operatorname{ctg} x = \angle\operatorname{tg}\frac{1}{x} \quad y \in \langle 0, \pi\rangle$

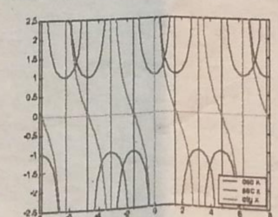
$y = \angle\sec x = \angle\cos\frac{1}{x} \quad y \in [0, \pi]$

$y = \angle\csc x = \angle\operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

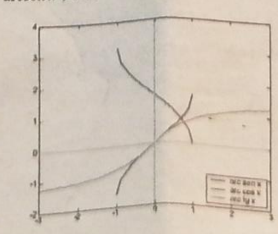
Gráfica 1. Las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$:



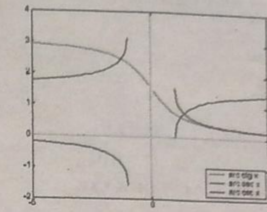
Gráfica 2. Las funciones trigonométricas $\csc x$, $\sec x$, $\operatorname{ctg} x$:



Gráfica 3. Las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$:



Gráfica 4. Las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccsc} x$:



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \operatorname{ctg}^2\theta = \csc^2\theta$

$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$

$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

$\operatorname{tg}(\theta + 2\pi) = \operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$

$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

$\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n\operatorname{sen}\theta$

$\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n\cos\theta$

$\operatorname{tg}(\theta + n\pi) = \operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{sen}(n\pi) = 0$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\operatorname{tg}(n\pi) = 0$

$\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n$

$\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$

$\operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \infty$

$\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

$\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$

$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

$\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty\rangle$

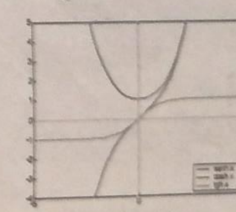
$\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$

$\operatorname{ctgh} : \mathbb{R} - \{0\} \to \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$

$\operatorname{sech} : \mathbb{R} \to \langle 0, 1]$

$\operatorname{csch} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$

Gráfica 5. Las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$:



FUNCS HIPERBÓLICAS INVERSAS

$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \ge 1$

$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

$\operatorname{ctgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1$

$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \le 1$

$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right), \quad x \ne 0$

IDENTIDADES DE FUNCS HIP

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\operatorname{ctgh}^2 x - 1 = \operatorname{csch} x$

$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

$\cosh(-x) = \cosh x$

$\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$

$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

$\operatorname{tgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$

$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

$\operatorname{tgh} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$

$\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

$\cosh^2 x = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

$\operatorname{tgh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}$

$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} 2x}{\cosh 2x + 1}$

OTRAS

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac =$ discriminante

LÍMITES

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e = 2.71828\ldots$

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x} = 1$

DERIVADAS

$D_x f(x) = \dfrac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

$\dfrac{d}{dx}(cx) = c$

$\dfrac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$

$\dfrac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx} \pm \dfrac{dw}{dx} \pm \cdots$

$\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{dw}{dx} + uw\dfrac{dv}{dx} + vw\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$

$\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dF}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ (Regla de la Cadena)

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{dx/du}$

$\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dF/du}{dx/du}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{f_2'(t)}{f_1'(t)}$ donde $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$

DERIVADA DE FUNCS LOG & EXP

$\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{du/dx}{u} = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\log u) = \dfrac{\log e}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\log_a u) = \dfrac{\log_a e}{u} \cdot \dfrac{du}{dx} \quad a > 0,\ a \neq 1$

$\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGO

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{ctg} u) = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \operatorname{tg} u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \operatorname{ctg} u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{vers} u) = \operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

DERIV DE FUNCS TRIGO INVER

$\dfrac{d}{dx}(\angle \operatorname{sen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\angle \cos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\angle \operatorname{tg} u) = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\angle \operatorname{ctg} u) = -\dfrac{1}{1 + u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\angle \sec u) = \pm \dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \dfrac{du}{dx} \begin{cases} + \text{ si } u > 1 \\ - \text{ si } u < -1 \end{cases}$

$\dfrac{d}{dx}(\angle \csc u) = \mp \dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \dfrac{du}{dx} \begin{cases} - \text{ si } u > 1 \\ + \text{ si } u < -1 \end{cases}$

$\dfrac{d}{dx}(-\operatorname{vers} u) = \dfrac{1}{\sqrt{2u - u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

DERIVADA DE FUNCS HIPERBÓLICAS

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh} u = \operatorname{sech}^2 u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctgh} u = -\operatorname{csch}^2 u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \operatorname{ctgh} u \dfrac{du}{dx}$

DERIVADA DE FUNCS HIP INV

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \dfrac{du}{dx},\ u > 1 \begin{cases} + \text{ si } \cosh^{-1} u > 0 \\ - \text{ si } \cosh^{-1} u < 0 \end{cases}$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh}^{-1} u = \dfrac{1}{1 - u^2} \cdot \dfrac{du}{dx},\ |u| < 1$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctgh}^{-1} u = \dfrac{1}{1 - u^2} \cdot \dfrac{du}{dx},\ |u| > 1$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1 - u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx} \begin{cases} - \text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u > 0, u \in \langle 0,1 \rangle \\ + \text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u < 0, u \in \langle 0,1 \rangle \end{cases}$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx},\ u \neq 0$

INTEGRALES DEFINIDAS, PROPIEDADES

$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

$\int_a^b cf(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

$\int_a^a f(x) dx = 0$

$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$

$\Leftrightarrow m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b],\ m, M \in \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

$\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b]$

$\left|\int_a^b f(x) dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ si $a < b$

INTEGRALES

$\int a dx = ax$

$\int af(x) dx = a\int f(x) dx$

$\int (u \pm v \pm w \pm \cdots) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int w dx \pm \cdots$

$\int u dv = uv - \int v du$ (Integración por partes)

$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

$\int \dfrac{du}{u} = \ln|u|$

INTEGRALES DE FUNCS LOG & EXP

$\int e^u du = e^u$

$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\int ua^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} \cdot \left(u - \dfrac{1}{\ln a}\right)$

$\int ue^u du = e^u(u - 1)$

$\int \ln u du = u \ln u - u = u(\ln u - 1)$

$\int \log_a u du = \dfrac{1}{\ln a}(u \ln u - u) = \dfrac{u}{\ln a}(\ln u - 1)$

$\int u \log_a u du = \dfrac{u^2}{4} \cdot (2\log_a u - 1)$

$\int u \ln u du = \dfrac{u^2}{4}(2\ln u - 1)$

INTEGRALES DE FUNCS TRIGO

$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u$

$\int \cos u du = \operatorname{sen} u$

$\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u$

$\int \csc^2 u du = -\operatorname{ctg} u$

$\int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u$

$\int \csc u \operatorname{ctg} u du = -\csc u$

$\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$

$\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\operatorname{sen} u|$

$\int \sec u du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u|$

$\int \csc u du = \ln|\csc u - \operatorname{ctg} u|$

$\int \operatorname{sen}^2 u du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u$

$\int \cos^2 u du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u$

$\int \operatorname{tg}^2 u du = \operatorname{tg} u - u$

$\int \operatorname{ctg}^2 u du = -(\operatorname{ctg} u + u)$

$\int u \operatorname{sen} u du = \operatorname{sen} u - u \cos u$

$\int u \cos u du = \cos u + u \operatorname{sen} u$

INTEGRALES DE FUNCS TRIGO INV

$\int \angle \operatorname{sen} u du = u \angle \operatorname{sen} u + \sqrt{1 - u^2}$

$\int \angle \cos u du = u \angle \cos u - \sqrt{1 - u^2}$

$\int \angle \operatorname{tg} u du = u \angle \operatorname{tg} u - \ln \sqrt{1 + u^2}$

$\int \angle \operatorname{ctg} u du = u \angle \operatorname{ctg} u + \ln \sqrt{1 + u^2}$

$\int \angle \sec u du = u \angle \sec u - \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$

$= u \angle \sec u - \angle \cosh u$

$\int \angle \csc u du = u \angle \csc u + \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$

$= u \angle \csc u + \angle \cosh u$

INTEGRALES DE FUNCS HIP

$\int \operatorname{senh} u du = \cosh u$

$\int \cosh u du = \operatorname{senh} u$

$\int \operatorname{sech}^2 u du = \operatorname{tgh} u$

$\int \operatorname{csch}^2 u du = -\operatorname{ctgh} u$

$\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u du = -\operatorname{sech} u$

$\int \operatorname{csch} u \operatorname{ctgh} u du = -\operatorname{csch} u$

$\int \operatorname{tgh} u du = \ln \cosh u$

$\int \operatorname{ctgh} u du = \ln|\operatorname{senh} u|$

$\int \operatorname{sech} u du = \angle \operatorname{tg}(\operatorname{senh} u)$

$\int \operatorname{csch} u du = -\operatorname{ctgh}^{-1}(\cosh u)$

$= \ln \operatorname{tgh} \dfrac{1}{2} u$

INTREGRALES DE FRAC

$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \angle \operatorname{tg} \dfrac{u}{a}$

$= -\dfrac{1}{a} \angle \operatorname{ctg} \dfrac{u}{a}$

$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{u - a}{u + a} \quad (u^2 > a^2)$

$\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a + u}{a - u} \quad (u^2 < a^2)$

INTEGRALES CON $\sqrt{\ }$

$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \angle \operatorname{sen} \dfrac{u}{a}$

$= -\angle \cos \dfrac{u}{a}$

$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right)$

$\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \dfrac{1}{a} \ln\left|\dfrac{u}{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}\right|$

$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \angle \cos \dfrac{a}{u}$

$= \dfrac{1}{a} \angle \sec \dfrac{u}{a}$

$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2} \angle \operatorname{sen} \dfrac{u}{a}$

$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right)$

MAS INTEGRALES

$\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \dfrac{e^{au}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

$\int e^{au} \cos bu \, du = \dfrac{e^{au}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu)}{a^2 + b^2}$

ALGUNAS SERIES

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!}$

$+ \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$: Taylor

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)x^2}{2!}$

$+ \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$: Maclaurin

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

$\angle \operatorname{tg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Series de Maclaurin	Intervalo de convergencia
$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{k!}$	$(-\infty, \infty)$
$Cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!} x^{2k}$	$(-\infty, \infty)$
$Sen(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$(-\infty, \infty)$
$Sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty, \infty)$
$Ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, \infty)$
$Tan^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} x^{2k+1}$	$[-1, 1]$
$Sen^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^{n}n!)(2n+1)} x^{2k+1}$	$[-1, 1]$
$Ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k+1} x^{k+1}$	$(-1, 1]$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} x^{k}$	$(-1, 1)$

28-01-2019

Docente: Jaime Trujillo Dominguez
Materia: Cálculo Integral

Reglas:
- Respeto
- No celular

29-01-2019

1.1.1 La integral indefinida (Antiderivada y notación)

Una función F es la antiderivada de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

Observación

Si F es la antiderivada de f en el intervalo I y si G es la función dada por $G(x) = F(x) + c$ con c como constante, entonces $G'(x) = F'(x)$
$\therefore$ G también es antiderivada de f

Ejemplo

La derivada de x^3 es $3x^2$
Si conocemos $3x^2$, la función que se derivó para tener $3x^2$, con la antiderivada tendremos x^3

Teorema:

Si f, g son dos funciones definidas en el intervalo I tales que $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$
Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$ para toda x en I

El símbolo $\int$ denota el operador antiderivación y se escribe

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

donde:

$F'(x) = f(x)$
$d(F(x)) = f(x)\, dx$
$F(x) + c$ recibe el nombre de "antiderivada general de f"

x^2 Mult · exp -1 exp $+1$ exp / exp

No olvidar el $+c$

Ejemplos:

1- a) $2x$ $\quad x^2 + c$

2- b) $6x$ $\quad 3x^2 + c$

3- c) $-3x^{-4}$ $\quad x^{-3} + c$

1- b) x^2 $\quad x^3/3 + c$

1- c) $x^2 - 2x + 1$ $\quad \frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$

3- b) x^{-4} $\quad \frac{x^{-3}}{-3} + c$

30-01-2019

$F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ si $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

Es decir: $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ (Variable independiente)

Integrando

$f(x) = 2x$

$F(x) = x^2$

$G(x) = x^2 - 8$

$H(x) = x^2 + 6$

$I(x) = x^2 + c$

$I(x)$ es la antiderivada más general y esta se conoce como la integral indefinida

Si decimos que $\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^n$

Entonces aplicamos integral a toda la igualdad

$$\cancel{\int}\left(\cancel{\frac{d}{dx}}\, x^{n+1}\right) dx = (n+1) \int x^n\, dx$$

$$x^{n+1} + c = (n+1) \int x^n\, dx$$

Dividimos entre $n+1$ toda la igualdad

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Teorema

$$\int dx = x + c$$

Teorema

$$\int a \, f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$ con a como constante

Teorema

Sean f y g funciones definidas en el intervalo I

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Teorema

Sean $f_1, f_2 \ldots f_n$ funciones definidas en I, $\therefore$

$$\int \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \int f_i(x) \, dx$$

Teorema

Si $n \in \mathbb{Q}$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$ con $n \neq -1$

Teorema

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

Teorema

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

Teorema

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

Teorema

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

Ejercicios

18- $\int (5 - 6x) \, dx = 5x - 3x^2 + c$

Todo el procedimiento

18- $\int (5-6x)\,dx$

$\int 5\,dx - \int 6x\,dx$

$5\int dx - 6\int x\,dx$

$5\left(\frac{1}{0+1}\cdot x^{0+1} + c_1\right) - 6\left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} + c_2\right)$

$5x - 3x^2 + (5c_1 - 6c_2)$

$\therefore\ 5x - 3x^2 + c$

20- $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$

$\int \frac{t^2}{2}\,dt + \int 4t^3\,dt$

$\frac{1}{2}\int t^2\,dt + 4\int t^3\,dt$

$\frac{1}{2}\left(\frac{t^{2+1}}{2+1} + c_1\right) + 4\left(\frac{t^{3+1}}{3+1} + c_2\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + c_1\right) + 4\left(\frac{t^4}{4} + c_2\right)$

$\frac{t^3}{6} + \frac{c_1}{2} + t^4 + 4c_2$ → Como $\frac{c_1}{2} + 4c_2 = \mathbb{R}$ → c

$\frac{t^3}{6} + t^4 + c$

31-01-2019

26- $\int x^{-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + c$

Paso por paso

$\frac{1}{-\frac{5}{4}+1}\cdot x^{-5/4+1} + c$

$\frac{1}{-1/4}\cdot x^{-1/4} + c$

$\frac{x^{-1/4}}{-1/4} + c = -\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + c$

32- $\int x^{-3}(x+1)\,dx$

$\int\left(\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

$\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-2}dx+\int x^{-3}dx$

$\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c_1+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c_2$

$\frac{x^{-1}}{-1}+c_1+\frac{x^{-2}}{-2}+c_2$

$-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$

- $\int 2ab^3x^2\,dx$

$2ab^3\int x^2\,dx$

$2ab^3\cdot\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}+c$

$2ab^3\cdot\frac{x^3}{3}+c$

$\frac{2ab^3x^3}{3}+c$

- $\int 2ab^3x^2\,da$

$2b^3x^2\int a\,da$

$2b^3x^2\cdot\frac{1}{1+1}+a^{1+1}+c$

$2b^3x^2\cdot\frac{a^2}{2}+c$

$\frac{2b^3x^2a^2}{2}+c$

$b^3x^2a^2+c$

$$- \int 2ab^3x^2\,db$$

$$2ax^2 \int b^3\,db$$

$$2ax^2 \cdot \frac{1}{3+1} \cdot b^{3+1} + c$$

$$2ax^2 \cdot \frac{b^4}{4} + c$$

$$\frac{2ax^2b^4}{4} + c$$

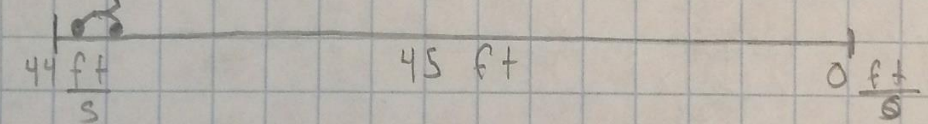
$$\frac{ax^2b^4}{2} + c$$

El Problema del Motociclista Seguro

El programa del "motociclista seguro" del estado de Illinois ~~del~~ exige que los ~~mo~~ motociclistas ~~s~~ sean capaces de frenar de 30 mph (44 ft/s) a 0 en 45 pies ¿Qué desaceleración constante se requiere para lograrlo?

30 mph → 0 mph

44 ft/s → 0



$$y = -\frac{44}{45}x + 44$$

$$y' = -\frac{44}{45}$$

Sabemos que $a = \frac{dv}{dt}$ y por regla de la cadena

$$a = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \therefore \quad a = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Luego

$$a = v \cdot \frac{dv}{ds} \rightarrow \int a\,ds = \int \left(v\frac{dv}{ds}\right) ds$$

$$a\int ds = \int v\,dv$$

$$a\left(\frac{1}{0+1}\right)s^{0+1} = \left(\frac{1}{1+1}\right)v^{1+1} + (c_2 - c_1)$$

$$as = \frac{v^2}{2} + c$$

$$V_{(0)} = 44\ \frac{ft}{s}$$

$$V_{(45)} = 0\ \frac{ft}{s}$$

$$a(0) = \frac{1}{2}(44) + c$$

$$0 = 968 + c \quad \therefore \quad c = -968\ \frac{ft^2}{s^2}$$

Entonces

$$a(45) = \frac{1}{2}(0) - 968$$

$$a = -21{,}51\ \frac{ft}{s^2}$$

- Resolver

$$\int\left(7x^2 + 3x - \frac{8}{x}\right)dx$$

$$\int 7x^2\,dx + \int 3x\,dx - \int \frac{8}{x}\,dx$$

$$7\int x^2\,dx + 3\int x\,dx - 8\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{7x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 8\ln x + c$$

$$\frac{7x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln x^8 + c$$

Curiosidad: Se pone valor absoluto al argumento de logaritmo si x o el argumento puede tomar valores negativos

05-02-2019

Introduccion a 1.1.3

$f(x) = \tan(x)$

$g(x) = \text{sen}(3x^2)$

Ejemplo:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$u = \cos(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(x) \rightarrow dy = -\text{sen}(x)\,dx$$

Curiosidad $\frac{dy}{dx} = y' \rightarrow dy = (y')\,dx$

Eso no es un despeje, es una tasa de cambio

$$\int \frac{-(-\text{sen}(x))}{\cos(x)}\,dx \rightarrow \text{tiene forma } \int \frac{du}{u}$$

$$\int -\frac{du}{u} \therefore -\int \frac{du}{u} \therefore -\ln|u| + c$$

$$\ln|u^{-1}| + c$$

$$\ln|(\cos x)^{-1}| + c$$

$$\ln|\sec x| + c$$

1.1.3 Integración por sustitucion, completando el diferencial

Teorema:

Sea g una función diferenciable, cuyo contradominio está contenido en I. Si f es una función definida en el intervalo I y cuya antiderivada es F también definida en I, entonces:

$f(x)$

$$\int f(g(x))\,(g'(x))\,dx = F(g(x)) + C$$

$f(x)$

$f'(x)$

$\int x \text{ sen } (3x^2)\, dx$

$f = \text{sen } (3x^2)$
$g = 3x^2$
$g' = 6x$

$\frac{1}{6} \int \text{sen } (3x^2)\, 6x\, dx$

$\frac{1}{6} \int \text{sen } u\, du \rightarrow -\frac{1}{6} \cos u + c$

$\therefore -\frac{1}{6} \cos (3x^2) + c$

Ejercicio

$$\int \frac{1 - \frac{8}{3}x}{\sqrt{3x - 4x^2}}\, dx$$

$\cancel{u = (3x - 4x^2)^{1/2}}$

$\cancel{du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(3x - 4x^2)^{1/2}} \cdot 3 - 8x}$

$\int (1 - \frac{8}{3}x) (\sqrt{3x - 4x^2})^{-1}$

$\int (1 - \frac{8}{3}x) (3x - 4x^2)^{-1/2}$

$u = 3x - 4x^2$
$du = 3 - 8x$

$\frac{1}{3} \int 3(1 - \frac{8}{3}x)(3x - 4x^2)^{-1/2}\, dx$

$\frac{1}{3} \int (u)^{-1/2}\, du \quad \therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + c$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3x - 4x^2}}{1/2} + c$

$\frac{2\sqrt{3x - 4x^2}}{3} + c$

07 - 02 - 2019

$\int \sqrt{a + bx}\, dx$

Solución

Nota. Integración por sustitución

Tomamos $u = a + bx$

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(a + bx) = b$

Entonces $\frac{du}{dx} = b \rightarrow du = u'\, dx$

$\therefore du = b\, dx$

de dondo $dx = \frac{du}{b}$

Asi $\int \sqrt{a+bx}\, dx = \int \sqrt{u} \left(\frac{du}{b} \right)$

$= \frac{1}{b} \int u^{1/2}\, du$

$= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{1/2+1} \cdot u^{1/2+1} \right) + c$

$\frac{1}{b} \left(\frac{1}{3/2} \cdot u^{3/2} \right) + c$

$\frac{2u^{3/2}}{3b} + c$

$\frac{2(a+bx)^{3/2} + c}{3b}$

$\therefore \int \sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2(a+bx)\sqrt{a+bx}}{3b} + c$

$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\, dx$ $\qquad u = 4x^2+3$

$\frac{du}{dx} = 8x \rightarrow du = 8x\, dx$

$\frac{8}{8} \int \frac{x}{u^6}\, dx$

$\frac{1}{8} \int \frac{1}{u^6} 8x\, dx \rightarrow \frac{1}{8} \int \frac{du}{u^6} \rightarrow \frac{1}{8} \int u^{-6}\, du$

$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{-6+1} \cdot u^{-6+1} \right) + c = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{-5} \cdot u^{-5} \right) + c$

$\frac{1}{-40 \cdot u^5} + c = -\frac{1}{40(4x^2+3)^5} + c$

Otra forma

$u = 4x^2+3$

$\frac{du}{dx} = 8x \quad du = 8x\, dx \quad \frac{du}{8} = x\, dx$

$$\int \frac{x\,dx}{(4x^2+3)^6} = \int \frac{\frac{du}{8}}{u^6} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u^6}$$

Y se prosigue como anteriormente

$$\int (4y^2+4y+1)^{3/2}\,dy$$

~~$u = 4y^2+4y+1$~~

~~$du = 8y+4\,dx$~~

$$4y^2+4y+1 = (2y+1)^2$$

$$\int [(2y+1)^{\cancel{2}}]^{3/\cancel{2}}\,dy$$

$u = 2y+1$

$du = 2\,dy \rightarrow \frac{du}{2} = dy$

$$\int (2y+1)^3\,dy$$

$$\int u^3\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3+1}\cdot u^{3+1}\right)+c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot u^4\right)+c$$

$$\frac{u^4}{8}+c = \frac{(2y+1)^4}{8}+c$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$$

$u = x^2-1$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$$\int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot \ln|u|+c$$

$$\frac{1}{2}\cdot \ln|x^2-1|+c$$

08/02/2019

$$\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}\,dx$$

$$\int (x+3)(x^2+6x)^{-1/3}\,dx \qquad u = x^2+6x \qquad du = (2x+6)\,dx$$

$du = 2(x+3)\,dx$

$$\frac{1}{2}\int 2(x+3)(x^2+6x)^{-1/3}\,dx \rightarrow \int u\cdot\frac{du}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\int u^{-1/3}\,du$$

z^2+2z+1

$$\frac{1}{2}\int u^{-1/3}\,du \therefore \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}\cdot u^{-1/3+1}\right]+c$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\cdot u^{2/3}\right)+c$$

$$\frac{3}{4}\cdot(x^2+6x)^{2/3}+c$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+c$$

Observación

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ \text{integrando}}}{\boxed{\quad\quad}}\; d\underset{\substack{\uparrow\\ \text{v. indep.}}}{\boxed{\,}}$$

$$\int \sqrt{y^2-2y^4}\,dy \qquad y^2-2y^4=(y-\sqrt{2}\,y)^2$$

$$y^2(1-2y^2) \rightarrow y\sqrt{1-2y^2}$$

$$\int y\sqrt{1-2y^2}\,dy \qquad u=1-2y^2$$

$$du=-4y\,dy \qquad \frac{du}{-4}=y\,dy$$

$$\int u^{1/2}\left(\frac{du}{-4}\right) \longrightarrow -\frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du = -\frac{(1-2y^2)\sqrt{1-2y^2}}{6}+c$$

$$\int \frac{z^2+2z}{(z+1)^2}\,dz = \int \frac{z^2+2z+1-1}{(z+1)^2}\,dz \rightarrow \int \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2}$$

$$\int 1-\frac{1}{(z+1)^2}\,dz \rightarrow \int 1\,dz - \int \frac{1}{(z+1)^2}\,dz$$

$$z-\int u^{-2}\,du \qquad u=z+1$$

$$z-\left(\frac{1}{-2+1}\cdot u^{-2+1}\right)+c \qquad du=1$$

$$z-\left(\frac{1}{-1}\cdot u^{-1}\right)+c$$

$$z-\left(-\frac{1}{z+1}\right)+c \rightarrow z+\frac{1}{z+1}+c$$

12-02-2019

Fórmulas de Integración Elementales

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} \, dx$$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\text{sen } x$

$du = -\text{sen } x \, dx \longrightarrow \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u}$

$\therefore -\ln |u| + c$

$-\ln |\cos x| + c$

$\ln |(\cos x)^{-1}| + c \longrightarrow \ln |\sec x| + c$

Ejercicio

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen } x} \, dx$$

$u = \text{sen } x$ $\quad \int \frac{du}{u} \longrightarrow \ln |u| + c$

$du = \cos x \, dx$ $\quad \ln |\text{sen } x| + c$

Teorema

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

Teorema

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$$

Ejercicio

$$\int \text{sen} \left(\frac{1}{2} x\right) dx$$

Entonces $\int \text{sen } u \, du = -\cos u + c$

$u = \frac{1}{2} x \quad du = \frac{1}{2} dx$

$\int \text{sen } u \left(\frac{du}{\frac{1}{2}}\right)$

$2 \int \text{sen } u \, du \quad \therefore \quad 2 \cdot -\cos u + c$

$-2 \cos \left(\frac{1}{2} x\right) + c$

- $\int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx$

Por propiedad $\operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a = \operatorname{sen}(a \pm b)$

Si $a = b \rightarrow \operatorname{sen} a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos a = \operatorname{sen}(2a)$

$2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = \operatorname{sen}(2a)$

$\therefore \operatorname{sen} a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2a)$

$\int (\operatorname{sen} x \cdot \cos x) \cdot (\operatorname{sen} x)\, dx$

$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \quad dx$

$u = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad \int u^2\, du$

$du = \cos x \quad\quad \frac{u^3}{3} + c$

$\longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

13/02/2019

$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}\, dx$

$\int \tan x + 1 \; dx \rightarrow \ln|\sec x| + x + c$

$\int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}\, dy \rightarrow \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y \cdot \cos y} \rightarrow \tan y \cdot \sec y$

Por formula

$\int \sec y \; \tan y \; dy = \sec y + c$

$\int (1 + \tan z)^2\, dz$

Tomamos en cuenta

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ Dividimos entre $\cos^2 \theta$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Desarrollamos

$\int 1 + 2 \tan z + \tan^2 z \; dz$

$\int \sec^2 z + 2 \tan z \; dz$ u

$\int \sec^2 z + 2 \int \tan z \; dz$

$\tan z + 2 \ln|\sec z| + c \rightarrow \tan z + \ln|\sec^2 z| + c$

14 - 02 - 2019

$\int \text{sen } u \cos u \, du$

$u = \text{sen } u$

$du = \cos u \, du$

$\int u \, du$

$\frac{1}{1+1} \cdot \text{sen}^{1+1} u + c$

$\frac{\text{sen}^2 u}{2} + c$

Otra forma

$2 \text{ sen } \theta \cos \theta = \text{sen } (2\theta)$

$\therefore \text{sen } \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ sen } (2\theta)$

$\therefore \int \text{sen } u \cos u \, du = \int \frac{1}{2} \text{ sen } (2u) \, du$

$\frac{1}{2} \int \text{sen } (2u) \, du \qquad u = 2u \quad du = 2 \, du$

$\frac{1}{4} \int 2 \text{ sen } (2u) \, du$

$-\frac{1}{4} \cos u + c_1$

Ahora como: $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

$= (1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}^2\theta$

$1 - 2 \text{ sen}^2\theta$

Por lo que $-\frac{1}{4}\left(1 - 2 \text{ sen}^2 u\right) + c_1$

$\frac{1}{2} \text{ sen}^2 u + c_1 - \frac{1}{4}$

$\frac{\text{sen}^2 u}{2} + c$

$\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}$

$$\int \frac{dz}{1+\cos z}$$

$$\frac{1}{1+\cos z} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z \cos z}$$

$$\frac{1}{1+\cos z} \cdot \frac{1-\cos z}{1-\cos z} = \frac{1-\cos z}{1-\cos^2 z} = \frac{1-\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} - \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} z} = \csc^2 z - \cot z \cdot \csc z$$

$$\int \csc^2 z\,dz - \int \csc z \cdot \cot z\,dz$$

$$-\cot z + c_1 - (-\csc z) + c_2 \rightarrow \csc z - \cot z + c$$

15 - 02 - 2019

Notación Sigma

Definición

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = f(m) + F(m+1) + f(m+2) \ldots f(n-1) + F(n)$$

donde m y n son enteros y $m < n$

Ejemplos:
$$\sum_{i=1}^{3} \cos(ix) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$$

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

A n se le conoce como límite superior, m es límite inferior y i es índice de la suma

Propiedades:

- $\sum_{i=1}^{n} c = cn$

- $\sum_{i=1}^{n} c \cdot f_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i$

De se propiedad sale $\int a\,v\,du = a \int v\,du$

- $\sum_{i=1}^{n} [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$

- $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$

Esto es válido porque:

— $f(a) + f(a+1) + f(a+2) \ldots = f(a+c-c) + f(a+c-c+1) \ldots$

Propiedad de la Suma Telescópica

- $\sum_{i=1}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$

$\cancel{f(i)} + \cancel{f(i+1)} + \cancel{f(i+2)} \ldots \cancel{f(n-1)} + f(n)$

$-(f(i-1) + \cancel{f(i-1+1)} + \ldots$

Teorema

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

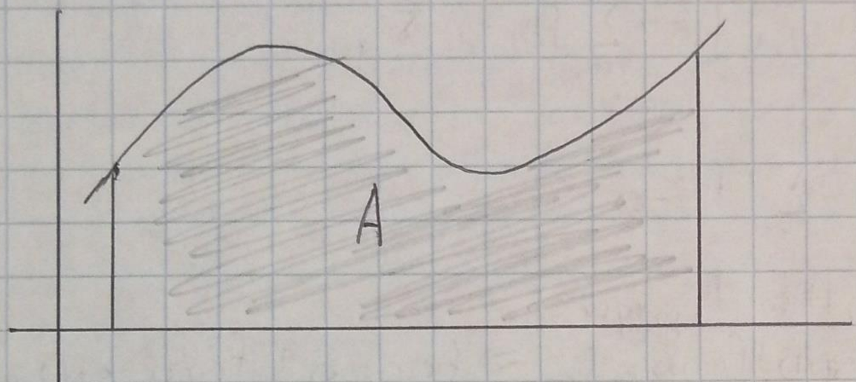
- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

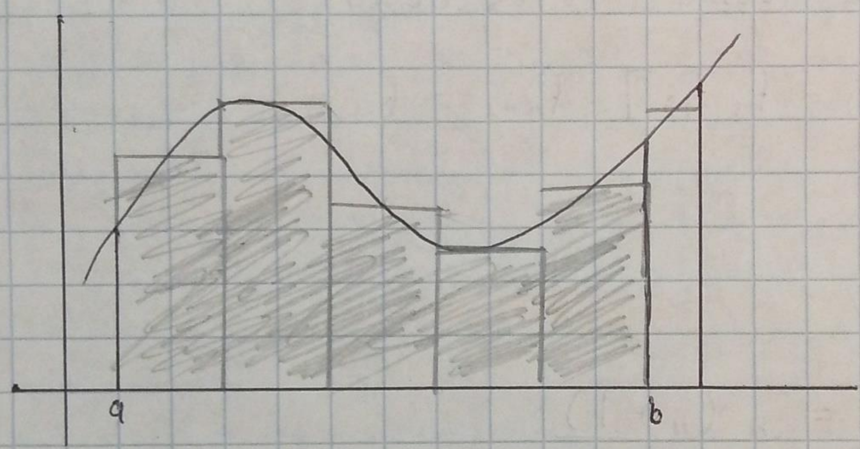
18 - 02 - 2019

Cálculo de Áreas

Consideramos $f(x) \geq 0$

Asignamos A al area de la región R





$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Cada subintervalo se denota x_0, x_1, x_2 donde:

$x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$ ... $x_k = a + k\Delta x$ ... $x_n = b$

El késimo subintervalo se denota con $[x_{k-1}, x_k]$

Se escoge un número $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ y se forman n productos

Nota: Cada producto $f(x_k^*)\Delta x$ es el area de cada subintervalo

Formaremos una suma con todas esas áreas

La suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \cdot \Delta x$$

representa una aproximación al valor del área bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$

A partir de aquí surge el concepto de la integral definida

Definición:

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ con $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ y que R es limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$. Se divide $[a, b]$ en n subintervalos cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y denotamos el késimo subintervalo por $[x_{k-1}, x_k]$. Entonces si $f(x_k^*)$ es el valor de la función en un punto muestra del k-ésimo subintervalo, la medida del área de R es:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x$$

Es equivalente decir que Δx tiende a 0 que n a ∞

a)

Tenemos $f(x) = x + 2$

$x = 0$, $x = 4$

Aproximar el área acotado por $y = x + 2$, $x = 0$, $x = 4$ y el eje x (en hoja milimétrica)

b)

$f(x) = x^2 - 4$ $\quad a = 2$, $b = 4$ $\quad$ Intervalos: 5

Calcular con límite al infinito

b) $f(x) = x^2 - 4$

$\#$ rectangulos $= n$

$\#$ puntos $= n+1$

$\underbrace{a = 2 \qquad b = 4}$

$\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - 4)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_k = k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

$$\left[\left(\frac{2k}{n}\right)^2 - 4\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\frac{8k^2}{n^3} - \frac{8}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{8k^2}{n^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n}\right]$$

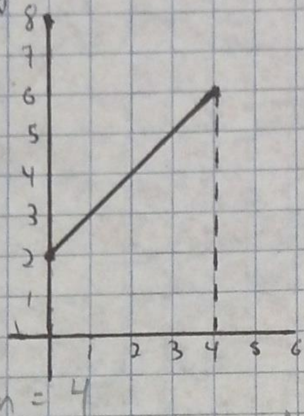
$$\lim \left[\frac{8}{n^3} \sum k^2 - \sum \frac{8}{n}\right]$$

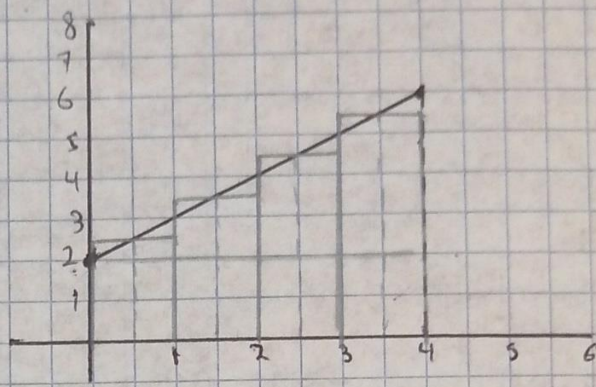
$$\lim \left[\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - n\left(\frac{8}{n}\right)\right]$$

$$\lim \left[\frac{4}{3}\left(\frac{n}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right) - 8\right]$$

$$\lim \left[\frac{4}{3}\left(1\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right) - 8\right]$$

a) Aproximar el área acotada por $y = x + 2$, $x = 0$, $x = 4$ y el eje x





8

$a = 0$

$b = 0$

$n = 4$

$\Delta x = \frac{4 - 0}{4}$ $\quad \Delta x = 1$

$x_0 = 0,\ x_1 = 0 + \Delta x = 0 + 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$

Tomamos puntos medios

$x_1^* = \frac{1+0}{2}$

$x_2^* = \frac{2+1}{2}$

$\vdots$

$f(0.5) = 2.5$

$f(1.5) = 3.5$

$f(2.5) = 4.5$

$f(3.5) = 5.5$

$\overline{16.0}$

$\cancel{1.25}$

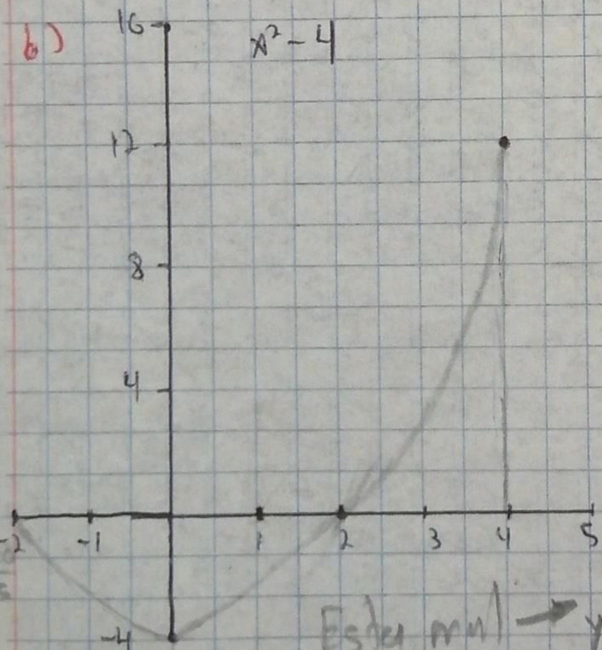
$\cancel{5.25}$

$\cancel{11.25}$

$\cancel{19.25}$

$\cancel{37}$

b)



$\frac{21}{5} - \frac{20}{5}$

Base $= \frac{2}{5}$

$\cancel{\frac{12}{5}\ \frac{14}{5}\ \frac{16}{5}\ \frac{18}{5}\ \frac{20}{5} = 4}$

$\cancel{\frac{12}{10}\ \frac{14}{10}\ \frac{16}{10}\ \frac{18}{10}\ \frac{20}{10}}$

$2 - \frac{12}{5} - \frac{14}{5} - \frac{16}{5} - \frac{18}{5} - \frac{20}{5} \cdot 4$

$\frac{11}{5}\quad \frac{13}{5}\quad \frac{15}{5}\quad \frac{17}{5}\quad \frac{19}{5}$

Esta mal $\rightarrow$ $y = \frac{101}{5}\quad \frac{149}{5}\quad \frac{205}{5}\quad \frac{269}{5}\quad \frac{341}{5}$

$A = \underbrace{\frac{202}{25}\quad \frac{298}{25}\quad \frac{410}{25}\quad \frac{538}{25}\quad \frac{682}{25}}$

$\frac{2130}{25} = 85.2$

Calcular con el limite al infinito

b) $f(x) = x^2 - 4$

Propuesto) $f(x) = x^2$ desde $x = 0$ a $x = 2$

Primero dividimos el intervalo $[0, 2]$ en subintervalos de n longitud: $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

Ahora, para obtener los puntos de x con los que se calculará la altura de cada rectángulo se usará x_i:

$$x_i = a + i\Delta x$$
$$x_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

La enèsima suma de Riemann es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$\frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

El área de la región es el límite de las sumas

$4n+4$

$8n^2+4n+2n+4$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{8n^2+6n+4}{3n^2}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2}{3n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{3n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3} + \cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{6}{3n}}^{0} + \cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n^2}}^{0} = \frac{8}{3}$$

25-02-2019

~~Cálculo Integral~~

La Integral Definida

Tenemos interés en

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Si las sumas de Riemann dadas se aproximan a L para toda partición Δ de $[a,b]$ para la norma $\|\Delta\|$ esté cerca de 0

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L$$

Definición

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces la integral definida de f de a a b la denotamos como $\int_a^b f(x)\,dx$ dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L$$

Si ese límite existe, se dice que la función f es integrable

Observación

- Los números a y b son los límites inferior y superior de integración
- La función f es el integrando
- Que la norma de la partición, es decir, $\|\Delta\|$, tienda a cero siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito, pero el hecho de que $n\to\infty$ no necesariamente implica que $\|\Delta\|\to 0$

Teorema

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe su integral, es decir, f es integrable sobre el intervalo

Teorema

Si una función f está acotada sobre el intervalo $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \leq f(x) \leq B$ para toda x en el intervalo finito, entonces f ~~es~~ integrable entre el intervalo

Para terminar, decimos que el cálculo de áreas y la integral definida son los mismos

Pero la integral definida no necesariamente es un área, por ejemplo $\int_0^4 (x^2 - 4)\, dx$ no representa área por ser negativa

Definicion

Si f está definida en $x = a$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Si f es integrable en $[a, b]$ entonces

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades de la integral

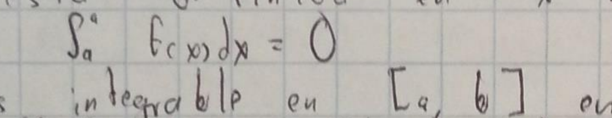
Teorema

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

1. $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los puntos a, b, c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$



Para cualquier constante k

$$\int_a^b k\,dx = k \int_a^b dx = k(b-a)$$

Sean f y g funciones sobre el intervalo $[a, b]$

1. Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Utiliza sumas de Riemann para probar
$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Vamos a utilizar n subintervalos y por tanto $n+1$ puntos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{con } i = 0 \text{ hasta } n$$

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{\left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i\right] + \left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right]}{2}$$

$$2a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)i - \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_i^* = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i - \left(\frac{b-a}{2n}\right)$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i - \left(\frac{b-a}{2n}\right)\right]^2 \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \left\{\left[a - \left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\left(\frac{b-a}{n}\right) + 2\left[a - \left(\frac{b-a}{2n}\right)\right]\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 i^2\right\}$$

$$\sum \left[a - \left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\left(\frac{b-a}{n}\right) + \sum 2\left[a - \left(\frac{b-a}{2n}\right)\right]\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 i + \sum \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 i^2$$

28 - 02 - 2019

Ejemplos

Sabiendo que

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

Calcular

a) $\int_4^{-2} \frac{1}{2}\,dx = -\int_{-2}^{4} \frac{1}{2}\,dx$

$-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4} dx$

$-\frac{1}{2}(4-(-2))$

-3

b) $\int_3^6 4\,dx \quad 4\int_3^6 dx$

$4(6-3)$

12

c) $-\int_3^{-1} 10x\,dx \quad 10\int_{-1}^{3} x\,dx$

$10\left(\frac{1}{2}(9-1)\right)$

$10(4)$

40

d) $\int_{-1}^{4} (4x+1)\,dx \quad \int_{-1}^{4} 4x\,dx + 1\int_{-1}^{4} dx$

$4\left(\frac{1}{2}(16-1)\right) + 1(5)$

$30 + 5$

35

e) $\int_5^{-2} t^2\,dt \quad -\int_{-2}^{5} t^2\,dt$

$-\left(\frac{1}{3}(5^3-(-2)^3)\right)$

$-\frac{133}{3}$

f) $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 5)\, dx$

$3\int_{-1}^{3} x^2 - 5\int_{-1}^{3} dx$

$3\left(\frac{1}{3}(27 - (-1)^3)\right) - 5(4)$

$28 - 20 = 8$

Teorema Fundamental del Calculo

Si f es una función continua sobre $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Se reescribe como $f(x)\,]_a^b$

Observemos $x\,]_a^b = b - a$

$$x^2\,]_a^b = \frac{1}{2+1} x^{2+1}\,]_a^b = \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$x^5\,]_a^b = \frac{1}{6} x^6\,]_a^b = \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$$

1 - 03 - 2019

Ejemplo

$\int_{-1}^{1} \sqrt{2 + x}\, dx$ Sea $u = 2 + x$ $du = dx$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{u}\, du$

$\int_{-1}^{1} u^{1/2}\, du$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot u^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3} + c \rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}\,\Big|_{-1}^{1}$$

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{(2+1)^3} - \sqrt{(2-1)^3}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{27} - 1\right)$$

$$\frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$$

Hay una segunda forma:
Cuando calculamos la integral de una función compuesta, evitamos la segunda sustitución bajo el teorema:

Teorema
Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua en $[a, b]$ y sea f una función continua sobre el rango de g. Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$ entonces

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(d) - F(c)$$

El ejemplo anterior se haría:

Si $x = -1 \rightarrow u = 2 + (-1) = 1$
Si $x = 1 \rightarrow u = 2 + 1 = 3$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}\, dx = \underbrace{\int_1^3 \sqrt{u}\, du}$$

$\frac{2}{3}\left(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}\right)$ ∴ es equivalente

$$\int_1^2 x\sqrt{5-x^2}\, dx$$

$u = 5 - x^2 \qquad du = -2x\, dx \rightarrow -\frac{du}{2} = x\, dx$

$\int \sqrt{u}\left(-\frac{du}{2}\right) \longrightarrow \int_4^1 \sqrt{u}\left(-\frac{du}{2}\right)$

Si $x = 1 \rightarrow u = 5 - (1)^2 = 4$
$x = 2 \rightarrow u = 5 - (2)^2 = 1$

$\frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u}\, du$

$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} \cdot u^{3/2}\right]\Big|_1^4$

$\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right)\Big|_1^4}_{\frac{7}{3}}$

$4 - \frac{9}{4}$ $\frac{16}{4}$

05-03-2019

$$\int_{\frac{3}{2}}^{3} |x-2|\,dx$$

$$|a| \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$|x-2| \begin{cases} x-2 & x-2 \geq 0 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x-2 < 0 & x < 2 \end{cases}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} |x-2|\,dx + \int_{2}^{3} |x-2|\,dx$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} (2-x)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} 2\,dx - \int_{\frac{3}{2}}^{2} x\,dx + \int_{2}^{3} x\,dx - \int_{2}^{3} 2\,dx$$

$$2\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(2^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) + \frac{1}{2}\left(3^2-2^2\right) - 2\cdot(3-2)$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2}(5) - 2(1)$$

$$1 - \frac{7}{8} + \frac{5}{2} - 2$$

$$\frac{8}{8} - \frac{7}{8} + \frac{20}{8} - \frac{16}{8} = \frac{5}{8}$$

Ejemplos de Aplicación

La cantidad real de café en gramos en un recipiente de 230 g llenado por cierta máquina es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} & x \leq 227.5 \\ \frac{1}{5} & \text{para} & 227.5 \leq x \leq 232.5 \\ 0 & \text{para} & x \geq 232.5 \end{cases}$$

Determine las probabilidades de que uno de 230 g llenado por la máquina contendrá

a) Como mucho 228.65 g

b) Entre 229.34 y 231.66 g

$(t^2-1)(t^2+1)$
$(t+1)(t-1)(t^2+1)$
$2t\ dt$

a) $P(0 < x < 228.65)$

$$\int_0^{228.65} f(x)dx$$

$$\cancel{\int_0^{227.5} f(x)dx} + \int_{227.5}^{228.65} f(x)dx$$

0

$$\frac{1}{5}(228.65 - 227.5)$$

$= 0.23$

b) $P(229.34 \leq x \leq 231.66)$

$$\int_{229.34}^{231.66} f(x)dx$$

$$\frac{1}{5}(231.66 - 229.39) = 0.454$$

06-03-2019

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo, entonces:

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y $g'(x) = f(x)$

Una manera más tradicional de expresarlo es

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Calcular

$F'(x)$ si

$$F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t}\,dt \qquad F(x) = \sqrt[4]{t}$$

$$f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^4 - 1}\,dt \qquad F'(x) = \sqrt{t^4 - 1}$$

$$F(x) = \int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t}\, dt$$

$$\ln|1+t| \Big]_2^{\tan x}$$

Método corto:

$$F'(x) = \frac{1}{1+\tan x} \cdot \sec^2 x$$

Método largo:

Al ser una función compuesta, se usa la regla de la cadena, que dice:

$$\frac{d}{dx} F(h(x)) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Donde en este caso $h(x) = \tan x$

$$\therefore \frac{1}{1+h(x)} \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}$$

Y lo comprobamos por el método largo

Integramos $\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t}$ lo cual es:

$$\ln(1+t) \Big]_2^{\tan x}$$

Por ello:

$$\ln|1+\tan x| - \ln(3)$$

Y al derivar: $\frac{1}{1+\tan x} \cdot \sec^2 x - 0$

$$F(x) = \int_{1-x}^{x+1} t^2\, dt$$

Teorema del Valor Medio para Integrales

Si f es continua en $[a, b]$, entonces hay un c tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Despejando, obtendríamos f(c)

Sea $f(x) = 3x^2 - 2x$ en $[1, 4]$ Hallar su valor medio

$$\int_1^4 3x^2 - 2x$$

$$\int_1^4 3x^2 - \int_1^4 2x$$

$$x^3 - x^2 \Big]_1^4$$

$$(64 - 16) - (1 - 1)$$

$$48$$

Entonces

$$48 = f(c) \cdot (4-1)$$

$$16 = f(c) \quad \rightarrow \text{16 es el valor medio}$$

$$\therefore \cancel{3x^2 - 2x - 16 = 0}$$

Para obtener c:

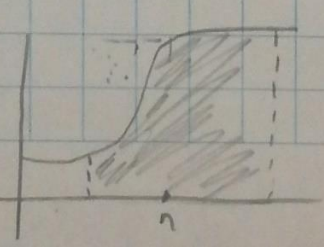
$$3x^2 - 2x = 16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{6}$$

$$x = \frac{2 + 14}{6} \qquad x = \frac{2 - 14}{6}$$

$$x = \frac{8}{3} \qquad x = -2$$



A int = a
A rect = a

17-03-2019

Unidad 2 Integrales de funciones trascendentes

Integración de funciones trigonométricas inversas

Definición

$y = sen^{-1}(x) \longleftrightarrow x = sen(y)$

$$\frac{d}{dx} sen^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \quad si \quad a > 0$$

La función tan^{-1}

$y = tan^{-1} x \longleftrightarrow x = tan(y) \qquad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{d}{dx} tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

Teorema:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \quad si \quad a \neq 0$$

La función sec^{-1}

$y = sec^{-1}(x) \longleftrightarrow x = sec\, y \begin{cases} y \in [0, \frac{\pi}{2}) & si\ x \geq 1 \\ y \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) & si\ x \leq -1 \end{cases}$

$$\frac{d}{dx} sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Teorema:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \quad si \quad a \geq 0$$

14 - 03 - 2019

Ejemplo

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

$$\int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{y}{3}\right) + c$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{4z^2-9}} \qquad \cancel{u = 2z \qquad du = 2dz}$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{4(z^2-\frac{9}{4})}} = \int \frac{dz}{z(2)\sqrt{z^2-\frac{3^2}{2^2}}}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-\frac{3^2}{2^2}}} = \frac{2}{3\cdot 2}\sec^{-1}\left(\frac{2z}{3}\right) + c$$

$$\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{2z}{3}\right) + c$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} \qquad u^2 = x^6,\ u = x^3 \rightarrow du = 3x^2dx \therefore \frac{du}{3} = x^2dx$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{1}\right) + c = \frac{1}{3}\cdot\operatorname{sen}^{-1}(x^3) + c$$

$$\int \frac{xdx}{3+x^4} = \int \frac{xdx}{3+(x^2)^2} \qquad u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4-(z+2)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$a^2 = 4 \therefore a = 2$$

$$u = z+2 \therefore du = dz$$

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{z+2}{2}\right) + c$$

15 - 03 - 2019

Integrales en las que interviene un logaritmo

La función logaritmo natural es la función definida por $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$

Teorema

Si u es diferenciable de x, y $u(x) > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema $\int \tan(u)\, du = \ln[\sec(u)] + c$

Observación

$$\int \tan(u)\, du = \int \frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)}\, du = -\int \frac{-\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)}\, du$$

$v = \cos(u)$

$dv = -\operatorname{sen}(u)\, du$ $\quad \therefore \quad -\int \frac{dv}{v}$

$-\ln |v| + c$

$\ln |v^{-1}| + c$

$\ln |\sec(u)| + c$

$$\int \cot(u)\, du = \ln[\operatorname{sen}(u)] + c$$

Se hace su demostración similar a la anterior

$$\int \sec(u)\, du = \ln[\sec(u) + \tan(u)] + c$$

$$\int \csc(u)\, du = \ln[\csc(u) - \cot(u)] + c$$

19-03-2019

Ejemplos
calcular

$\int \tan(2x)\,dx$ $\qquad u = 2x$
$\qquad du = 2\,dx$

$\frac{1}{2}\int \tan u\,du$

$\frac{1}{2}\cdot \ln|\sec(2x)| + c$

$\int x\cot(x^2)\,dx$ $\qquad u = x^2$
$\qquad du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\int \cot u\,du$

$\frac{1}{2}\cdot \ln|\operatorname{sen}(x^2)| + c$

$\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ $\qquad u = \sqrt{x}$ $\qquad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$2\int \sec u\,du$

$2\cdot \ln|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}| + c$

$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}\,dx$

$\int \tan x + 1\,dx$

$\int \tan x\,dx + \int dx$

$\ln|\sec x| + x + c$

$\int (1 + \tan x)^2\,dx$

$\int 1 + 2\tan x + \tan^2 x\,dx$

$\int dx + 2\int \tan x\,dx + \int \tan^2 x\,dx$

$x + 2\cdot\ln|\sec x| + \tan x - x + c$

$2\ln|\sec x| + \tan x + c$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan 2x + \sec 2x \quad dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan 2x + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec 2x \quad dx \qquad u = 2x \quad du = 2\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b \tan u \, du + \frac{1}{2}\int_a^b \sec u \, du$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln|\sec 2x| \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2} \cdot \ln|\sec 2x + \tan 2x| \Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 2 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot \ln 1}^{0} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2+\sqrt{3}) - \cancel{\frac{1}{2} \cdot \ln 1}^{0}$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln(2+\sqrt{3})\right)$$

$$\approx 1.005$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cot(3x) + \csc(3x) \, dx \qquad u = 3x \qquad du = 3\,dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot \ln|\text{sen } 3x| + \frac{1}{3} \cdot \ln|\csc 3x - \cot 3x| \Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\left[\cancel{\frac{1}{3} \cdot \ln 1} + \frac{1}{3} \ln(1-0)\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \ln(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$[0 + 0] - [-1.0397 + (-2.644)]$$

$$\approx 3.6838$$

Integracion de la función exponencial

La exponencial natural es la inversa de la logaritmo natural

Es: $\qquad e^x = y \quad \text{si} \quad x = \ln y$

Propiedades:

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$(e^a)^b = e^{ab}$

Teorema

Si u es una función diferenciable de x:

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln(a) \frac{du}{dx}$$

Si $a \neq 1$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} \cdot a^u + c$$

21-03-2019

Evaluar

$$\int 5^x dx \qquad a = 5 \qquad u = x$$

$$\frac{5^x}{\ln 5} + c$$

$$\int \frac{3^y}{3 - 3^y} dy$$

$u = 3 - 3^y$

$du = -3^y \ln(3)\, dy$

$3^y dy = -\frac{1}{\ln(3)} du$

$$\int \frac{3^y dy}{3 - 3^y} = \int \frac{-\frac{1}{\ln(3)} du}{u} = -\frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln|u| + c$$

$$-\frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln|3 - 3^y| + c$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} x\, 2^{x^2} dx \qquad a = 2 \qquad u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} 2x \cdot 2^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_d^e a^u du$$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^u}{\ln a} \right) \Big]_d^e$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{x^2}}{\ln 2} \right) \Big]_1^{\sqrt{2}}$

$\frac{1 \cdot 2^{\sqrt{2}^2}}{2 \cdot \ln 2} - \frac{1 \cdot 2^1}{2 \cdot \ln 2}$

$\frac{4 - 2}{\ln 4} \approx 1.44$

$\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx \quad a = 2 \quad u = \sqrt{x} \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$2 \int_d^e a^u \, du$

$2 \cdot \frac{a^u}{\ln a} \Big]_d^e$

$2 \cdot \frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} \Big]_1^4$

$\frac{2 \cdot 4}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2}{\ln 2} = \frac{8 - 4}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 2}$

$\int (e^{3x} + 5e^{-x}) \, dx$

$\int e^{3x} dx + \int 5e^{-x} \, dx$

$u = 3x \quad du = 3\,dx \qquad u = -x \quad du = -dx$

$\frac{1}{3} \cdot e^{3x} - 5e^{-x} + c$

22-03-2019

$\int 2e^{2x+1} dx \qquad u = 2x - 1 \quad du = 2\,dx \quad \therefore \frac{du}{2} = dx$

$\int e^u \, du$

$e^{2x+1} + c$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr \qquad u=-\sqrt{r} \qquad du=-\frac{dr}{2\sqrt{r}} \qquad \frac{dr}{\sqrt{r}}=-2\,du$$

$$-2\int e^{u}\,du$$

$$-2\cdot e^{-\sqrt{r}}+c$$

$$\int \sec(\pi t)\tan(\pi t)\,e^{\sec(\pi t)}\,dt \qquad u=\sec(\pi t)$$

$$du=\pi\cdot\sec(\pi t)\tan(\pi t)\,dt$$

$$\frac{1}{\pi}\int e^{u}\,du$$

$$\frac{e^{\sec(\pi t)}}{\pi}+c$$

$$\int 2y\,e^{-y^2}\,dy \qquad u=-y^2 \qquad du=-2y\,dy \to -du=2y\,dy$$

$$-\int e^{u}\,du$$

$$-e^{-y^2}+c$$

25-03-2019

Integración de funciones hiperbólicas

Estas satisfacen la ecuación de la hipérbola y no se necesita estar en radianes porque estas están en función de e^{x} ó e^{-x}, sus combinaciones dan como resultado las funciones hiperbólicas

La función seno hiperbólico denotada como senh y, la coseno hiperbólico, $\cosh$ se definen como:

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\operatorname{senh}(x)$ está acotada por abajo por $-\frac{1}{2}e^{-x}$ y por arriba por $\frac{1}{2}e^{x}$

$\cosh(x)$ está acotada por la izquierda por $\frac{1}{2}e^{-x}$ y por la derecha por $\frac{1}{2}e^{x}$

~~La tanh, coth~~,

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

Propiedad 1:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$
$$\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$$
$$\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$$

Observación:

$$\cosh(x) + \operatorname{senh}(x) = e^{x}$$
$$\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = e^{-x}$$

a numa

Otras propiedades:

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(y)\cosh(x)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$$
$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$$

Propiedades relacionadas a la derivada

Si u es diferenciable en x:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(u) = \cosh(u)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(u) = \operatorname{senh}(u)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\tanh(u) = \operatorname{sech}^2(u)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\coth(u) = -\operatorname{csch}^2(u)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(u) = -\operatorname{sech}(u)\tanh(u)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}(u) = -\operatorname{csch}(u)\coth(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

Sus integrales

$\int \operatorname{senh}(u)\, du = \cosh(u) + c$

$\int \cosh(u)\, du = \operatorname{senh}(u) + c$

$\int \operatorname{sech}^2(u)\, du = \tanh(u) + c$

$\int \operatorname{csch}^2(u)\, du = -\coth(u) + c$

$\int \operatorname{sech}(u) \tanh(u)\, du = -\operatorname{sech}(u) + c$

$\int \operatorname{csch}(u) \coth(u)\, du = -\operatorname{csch}(u) + c$

26-03-2024

Ejemplos

Evaluar las siguientes integrales

$\int \operatorname{senh}^4(x) \cosh(x)\, dx$

$u = \operatorname{senh}(x) \qquad du = \cosh(x)\, dx$

$\int u^4\, du$

$\frac{u^5}{5} + c$

$\frac{\operatorname{senh}^5(x)}{5} + c$

$\int x^2 \operatorname{csch}^2(x^3)\, dx \qquad u = x^3 \qquad du = 3x^2\, dx$

$\frac{1}{3} \cdot -\coth(x^3) + c$

$-\frac{\coth(x^3)}{3} + c$

$\int \tanh(2x) \ln[\cosh(2x)]\, dx$

$u = \ln[\cosh(2x)] \qquad du = 2\tanh(2x)\, dx$

$\frac{1}{2} \int u\, du$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln[\cosh(2x)]^2}{2} + c$

$\frac{\ln[\cosh(2x)]}{2} + c$

$\int x \operatorname{senh}(x^2)\,dx$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(u)\,du$

$\frac{\cosh(x^2)}{2} + c$

$\int \operatorname{sech}^4(x)\,dx$

$\int \operatorname{sech}^2(x) \cdot \operatorname{sech}^2(x)\,dx$

$\int [1 - \tanh^2(x)] \operatorname{sech}^2(x)\,dx$

$\int \operatorname{sech}^2(x) - \tanh^2(x) \operatorname{sech}^2(x)\,dx$

$\int \operatorname{sech}^2(x)dx - \int \tanh^2(x) \operatorname{sech}^2(x)\,dx$

$\tanh(x) - \frac{\tanh^3(x)}{3} + c$

27-03-2019

Regla de L' Hopital

Recordemos

Para calcular límites; se cuenta con propiedades para determinarlos:

$\lim_{x\to 3}(3x+2) = \lim_{x\to 3} 3x + \lim_{x\to 3} 2$

$3 \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2$

$3(3) + 2 = 11$

$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+4} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+4)}$

$\sqrt{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} 4}$

$\sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

Al calcular el límite

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} x^2-16}{\lim\limits_{x\to 4} x-4}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 4} x^2 - \lim\limits_{x\to 4} 16}{\lim\limits_{x\to 4} x - \lim\limits_{x\to 4} 4}$$

$$\frac{4^2-16}{4-4} = \frac{0}{0}$$

En realidad lo que sucede:

$$\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4 \quad \text{siempre que } x \neq 4$$

Porque $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\exists\, a^{-1} = \frac{1}{a} \;\Big|\; a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

La condición nos dice que a debe ser diferente de 0 y como en 4, el valor es 0,
Pero como el límite tiende a 4 y no es 4, es válido eliminar esto como 1, mientras no tomemos 4
Ahora tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Usaremos derivadas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\frac{d}{dx} x} \longrightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$$

28-03-2019

Definición:
Si f, g son funciones, tales que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, entonces la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en x_0.
Así en los ejemplos anteriores:

$\equiv$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$$

Nótese que

$f(x) = x^2 - 16$, $g(x) = x - 4$ y que $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x)$

evaluando $(4)^2 - 16$

$16 - 16 = 0$

y $\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} (x-4)$

$= 4 - 4 = 0$

Por tanto, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ tiene la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ en $x = 4$

El tercer ejemplo

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ donde $f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = x$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)$ evaluando $\operatorname{sen}(0) = 0$

y $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x$ evaluando $0 = 0$

De esta manera, tiene la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ en $x = 0$

Teorema:

Sean f y g funciones diferenciables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en $x = x_0$

Supongamos que para todo $x \neq x_0$, $g(x_0) \neq 0$

entonces si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ y

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Nota:

El teorema también se cumple si $x \downarrow x_0$ y cuando $x \uparrow x_0$

Ejemplos:

Evaluar

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$

Vemos que $\lim_{x \to 0} x = 0$

y $\lim_{x \to 0} e^x - 1 = 0$

Aplicamos L'Hôpital

Como f y g son diferenciables

$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = e^x$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 9x - 10}{x^2 + 6x - 7}$

$\lim_{x \to 1} \frac{2x + 9}{2x + 6} = \frac{11}{8}$

Pues se cumplen las condiciones del teorema

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[7]{x} - 1}{\sqrt[9]{x} - 1}$

$\sqrt[7]{1} - 1 = 0$

$\sqrt[9]{1} - 1 = 0$ $\therefore \left(\frac{0}{0}\right)$ en $x = 1$

$f(x)\ x^{1/7} - 1 = f'(x) = \frac{1}{7} \cdot x^{-6/7}$

$g(x)\ x^{1/9} - 1 = g'(x) = \frac{1}{9} \cdot x^{-8/9}$

$\left\} \frac{\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}}{\frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}} \right.$

$\frac{9\sqrt[9]{x^8}}{7\sqrt[7]{x^6}} \rightarrow \frac{9}{7}$

29-03-2024

Otro tipo de forma indeterminada

Se presenta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \tan\left(\frac{2}{x}\right)} \to \frac{\frac{1}{x}}{\tan\left(\frac{2}{x}\right)}$$

donde $\lim_{x \uparrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ y

$$\lim_{x \uparrow \infty} \tan\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

Teorema

Con f y g como funciones diferenciables

si $\lim_{x \uparrow \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{g(x) \uparrow \infty} g(x) = 0$

Aplicando el teorema:

$$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^2} \sec^2\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \uparrow \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}} \sec^2\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sec^2(0)}\right] = \frac{1}{2}$$

Ahora consideremos el siguiente problema

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln(x) \to \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

donde $\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Obteniendo la forma indeterminada $\frac{-\infty}{\infty}$ como $\frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$

Comprobamos la veracidad del teorema

Aplicamos el teorema al límite

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{\dots} -x = 0$$

1 1

Para aplicar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{\ln(2+e^x)}$$

$$\lim_{\dots} 5x = \infty$$

$$\lim_{\dots} \ln(2+e^x = \infty$$

Por lo que se aplica el teorema

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{\ln(2+e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{e^x}{2+e^x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5(2+e^x)}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} (10+5e^x)\, e^{-x}$$

$$\lim_{x\to\infty} (10e^{-x}+5)$$

$$10(0)+5 = 5$$

01/04/2019

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) \to 0 \\ \frac{1}{x} \to 0 \end{array}\right\} \frac{0}{0}$$

$$\operatorname{sen} 2x^{-1} = \cos(2x^{-1}) \cdot -2x^{-2} = \frac{-2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow -\left[\frac{\frac{2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$\frac{2x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2} = 2\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 2\cos(0) = 2$$

$-\frac{2}{3} = 2 \cdot -\frac{1}{3}$ $\qquad (a^2)^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{5}} - (1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\lim_{x\to 0} [}{\lim_{x\to 0} [}$$

$1 - 1 = 0$

$1 - 1 = 0$

$$\frac{\frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}} + \frac{1}{5}(1-x)^{-\frac{4}{5}}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} + \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}}$$

$$\frac{3}{5} \quad \frac{\frac{1}{5}[(1+x)^{-\frac{4}{5}} + (1-x)^{-\frac{4}{5}}]}{\frac{1}{3}[(1+x)^{-\frac{2}{3}} + (1-x)^{-2/3}]}$$

$$\cancel{\frac{3}{5} \frac{\{[(1+x)^{-2/3}]^2 - [(1-x)^{-2/3}]^2\}}{\{[(1+x)^{-2/3}]^2 - [(1-x)^{-2/3}]^2\}}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{5} \frac{(1+x)^{-\frac{4}{5}} + (1-x)^{-4/5}}{(1+x)^{-2/3} + (1-x)^{-2/3}}$$

evaluando

$$\frac{3}{5} \cdot \cancel{\frac{1+1}{1+1}} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{[\ln(x)]^3}{x}$$

$\ln(x)^3 = \infty$

$x = \infty$

$\ln(x)^3 \to 3 \cdot \ln(x) \to \frac{3}{x} = 0$

02-04-2019

Integral Impropia

En el estudio de la integral definida es porque esta en $[a, b]$

Ahora extenderemos la definición de integral definida en un intervalo infinito

Hay otras integrales cuyo intervalo no es infinito y se les considera impropias

Definicion

Si f es continua $\forall x \mid x \geq a$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Si el límite no existe, diverge

Si f es continua $\forall x \mid x \leq b$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \downarrow -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

Si f es continua $\forall x \mid x$ y $c \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{s \uparrow \infty} \int_{c}^{s} f(x)\,dx$$

03-04-2019

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$$

$$\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}} \qquad (1+x)^{1/3}$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{2/3} \Big]_{0}^{t}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (1+x)^{2/3} \Big]_{0}^{\infty}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (1+t)^{2/3} \Big]_{0}^{\infty}$$

evaluando $= \infty$

$$\int_{2}^{\infty} e^{-5p}\,dp$$

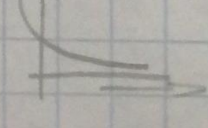
$$\lim_{t \uparrow \infty} \int_{2}^{t} e^{-5p}\,dp \qquad u = -5p \qquad du = -5\,dp$$

$$-\frac{1}{5} \int_{a}^{b} e^{u}\,du$$

$$-\frac{1}{5}\, e^{-5p} \Big]_{2}^{t}$$

$$-\frac{1}{5} \cdot e^{-5t} - \left(-\frac{1}{5} \cdot e^{-10}\right)$$

$$\frac{1}{5} \cdot e^{-10} - \cancel{\frac{1}{5} \cdot e^{-5t}} \;\; 0 \longrightarrow$$



tiende a 0

$$\longrightarrow \frac{1}{5} \cdot e^{-10}$$

$$a^u = \frac{a^u}{\ln a}$$

$$\int_{-\infty}^{0} 2^r \, dr$$

$\lim_{t \to -\infty}$

$$\frac{2^r}{\ln 2}\Big]_t^0$$

$$\frac{2^0}{\ln 2} - \cancel{\frac{2^t}{\ln 2}} \; 0$$

evalúo el lim

$$\frac{2^0}{\ln 2} - 0$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-4x} \, dx \qquad u = 3-4x \quad du = -4\, dx$$

$$-\frac{1}{4}\int_a^b \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{4} \ln|u| \Big]_a^b$$

$$\lim_{t \to -\infty} -\frac{1}{4} \ln|3-4x|\Big]_t^0$$

$$\lim_{t \to \infty} -\frac{\ln|3-0|}{4} - \left(-\frac{\ln|3-4t|}{4}\right)$$

$$-\frac{\ln 3}{4} + \infty$$

$$\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{x^2} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{x^2} \, dx + \int_{0}^{\infty} x e^{x^2} \, dx \qquad u = x^2 \quad du = 2x\, dx$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\Big|_t^0 + e^{x^2}\Big|_0^s \right]$$

$$\cancel{\frac{e^0}{2}} - \frac{e^{t^2}}{2} + \frac{e^{s^2}}{2} - \cancel{\frac{e^0}{2}}$$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{e^{s^2}}{2} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{t^2}}{2}$$

$\infty - \infty$ → Diverge

04-04-2019

$\tan^{-1}(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad u^2 = 1 \quad a^2 = x^2$$

$$u^2 \qquad a = x$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\lim_{s \downarrow -\infty} \int_{s}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t \uparrow \infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\lim_{s \downarrow -\infty} \left(\tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(s) \right) + \lim_{t \uparrow \infty} \left(\tan^{-1}(t) - \tan^{-1}(0) \right)$$

evaluando

$$\tan^{-1} 0 + 1.5 + 1.5 - \tan^{-1} 0$$

$$0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^5 \frac{u}{u-2}\, du$$

$$\int_0^5 \frac{u-2+2}{u-2}\, du = \int_0^5 \frac{u-2}{u-2} + \frac{2}{u-2} = \int_0^5 1 + \frac{2}{u-2}$$

$$\int_0^5 du + 2\int_0^5 \frac{du}{u-2} \qquad v = u-2 \quad dv = du$$

$$\int_0^5 du + 2 \ln|u-2| \Big|_0^5$$

$$u + 2\ln|u-2| \Big|_0^5$$

$$(5 + 2\ln 3) - (2 \ln 2)$$

$$7.197 - 1.386$$

$$5.811$$

Esto es incorrecto, es ∞

Hay una discontinuidad en $x = 2$ y biinea

Definición

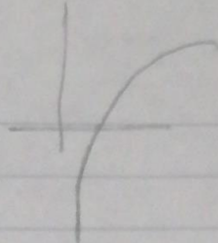
Si f es continua $\forall x \in [a, b]$ y si $\lim_{x \downarrow a} |f(x)| = \infty$

entonces

$$\lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)\, dx$$

Si el límite existe

Pasar def



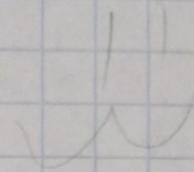
05-04-2019

Ejercicio:

$$\int_0^5 \frac{1}{x}\,dx$$

$$\lim_{b\downarrow 0}\int_b^5 \frac{dx}{x}$$

$$\lim_{b\downarrow 0} \ln 5 - \ln b$$



evaluando ∞

Es divergente

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{p\to 2}\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

$u = 2 - x \quad du = -dx$

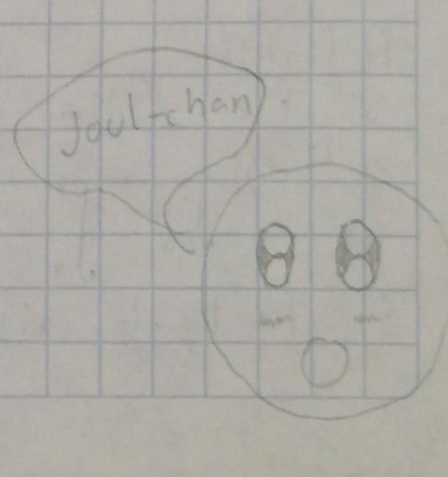
$$-\int_a^b \frac{du}{u^{1/2}}$$

$$-\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_a^b$$

$$-2\sqrt{2-x}\Big|_0^p$$

$$-2\sqrt{2-p} - (-2\sqrt{2-0})$$

$$0 + 2\sqrt{2}$$



09-04-2019

Una de las técnicas de integración más ampliamente utilizada es la integración por partes y surge de la derivada de un producto de funciones

$$\frac{d}{dx} f \cdot g = f \cdot \frac{dg}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}$$

$$f(x) \cdot g'(x) = \frac{d}{dx} f(x)\, g(x) - f'(x)\, g(x)$$

Al integrar

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int (f'(x)\, g(x))\, dx$$

Se considera:

$$u = f(x) \quad y \quad v = g(x)$$
$$du = f'(x)\, dx \qquad dv = g'(x)\, dx$$

De forma que la expresión

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int [\, f'(x)\, g(x)\,]\, dx$$

es igual a:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Inversas
Logaritmicas
Algebraicas
Trigonométricas
Exponenciales

El primer candidato a ser u son las inversas, el último las exponenciales

Ejemplo:

$$\int e^x x^2 \, dx$$

$u = x^2$ $\quad dv = e^x \, dx \quad \therefore \quad v = e^x$

$du = 2x \, dx$

$$= x^2 e^x - \int e^x (2x) \, dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int e^x \cdot x \, dx$$

$u = x$ $\quad dv = e^x \, dx \quad \therefore \quad v = e^x$

$du = dx$

$$= x^2 e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x \, dx \right)$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

- $$\int \ln(x) \, dx$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{x}$ $\quad v = x$

$$x \cdot \ln|x| - \int dx$$

$$x \ln|x| - x + c$$

$$\int e^{3x} (\cos(2x)) \, dx$$

...

$$\int \cos^2(x) \, dx$$

$\int \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx$ $\quad u = \cos(x)$ $\quad dv = \cos(x) \, dx$

$du = -\operatorname{sen}(x) dx$ $\quad v = \operatorname{sen}(x)$

$$= \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) - \int \operatorname{sen}(x) [-\operatorname{sen}(x)] \, dx$$

$$+ \int \operatorname{sen}^2(x)$$

$-\int v\,du$ 10-04-2019

$\int \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) dy$

$u = \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)$ $dv = dy$

$du = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2} \cdot -\frac{1}{y^2}$ $v = y$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y - \int y \cdot \left[\frac{1}{1+y^2} \cdot -\frac{1}{y^2}\right] dy$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y - \int y \cdot \left[-\frac{1}{y^2(1+y^2)}\right] dy$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y - \int -\frac{1}{y+y^3} dy$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y + \int \frac{1}{y+y^3} dy$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y +$

$\int x \,\text{senh}(x)\, dx$

Ajuda, el ILATE no da definición de las hiperbólicos

Pero $\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$u = x$ $dv = \text{senh}(x)\, dx$

$du = dx$ $v = \cosh(x)$

$= x \cdot \cosh(x) - \int \cosh(x)\, dx$

$x \cdot \cosh(x) - \text{senh}(x$

$\int 2^x e^{3x}\, dx$

11-04-2019

Integracion por sustitucion trigonometrica

Para este método utilizaremos 3 tipos de sustitución, a saber:

1- $u = a \cdot \text{sen}\,\theta$ $a^2 - u^2$

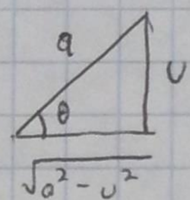
2- $u = a \cdot \tan\theta$ → $a^2 + u^2$

3- $u = a \cdot \sec\theta$ $u^2 - a^2$

4 Veamos en que la forma se resuelve

$a^2 + u^2$ $a^2 - u^2$ $u^2 - a^2$

1- $u = a \operatorname{sen}\theta \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{u}{a}$



Luego, cuando en el integrando interviene $\sqrt{a^2-u^2}$ se utiliza dicha sustitución, sabiendo que si $u = a \operatorname{sen}\theta$ con $a > 0$ entonces $du = a \cdot \cos\theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-(a \operatorname{sen}\theta)^2}$$
$$\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}$$
$$\sqrt{a^2}\sqrt{\cos^2\theta}$$
$$a\cos\theta$$

Ejemplo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Solución Vemos que $a^2 = 1 \therefore a = 1$

$u^2 = x^2 \therefore u = x$ y $du = dx$

La sustitución es $u = a \operatorname{sen}\theta \rightarrow u = \operatorname{sen}\theta$

$du = \cos\theta \, d\theta$

Así

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}}$$
$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}$$
$$\int \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$
$$-\cos\theta + c$$
$$-\sqrt{1-x^2} + c$$

17 /04 /204

La sustitución $u = a \tan \theta$

$$\int \frac{3\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$$

$$\int \frac{3\,dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}+x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{9}+x^2}}$$

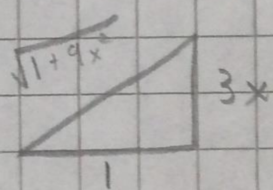
$a^2 = \frac{1}{9}, \quad a = \frac{1}{3}$

$u^2 = x^2 \rightarrow u = x \rightarrow du = dx$

$u = \frac{1}{3}\tan\theta \rightarrow du = \frac{1}{3}\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\frac{1}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{1}{9}(1+\tan^2\theta)}}$$

$$\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} \longrightarrow \int \sec\theta\, d\theta$$



$\sec\theta = \frac{H}{CA}$

$\therefore \sec\theta = \sqrt{1+9x^2}$

$$\ln\left|\sqrt{1+9x^2} + 3x\right| + c$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{2(4+x^2)}$$

$$\frac{\frac{1}{\cos}}{\frac{\text{sen}}{\cos}} = \frac{1}{\text{sen}} = \csc$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$

$a^2 = 1 \quad \therefore \quad a = 1$

$u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x \qquad du = dx$

$u = \tan\theta \rightarrow du = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta} = \cancel{\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta} = \cancel{\int \csc\theta\, d\theta}$$

$$\cancel{= \ln|\csc u - \cot u| + c}$$

$$\int \frac{\sec\theta \cdot \sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta \cdot \text{sen}\,\theta}$$

$\frac{1}{\cos^2}$

Solución:

$a^2 = 1 \rightarrow a = 1$

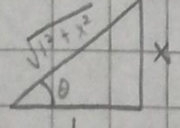
$u^2 = x^2 \rightarrow u = x \rightarrow du = dx$

Se propone: $u = \tan\theta \qquad du = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{1+(\tan\theta)^2}}{\tan\theta} \cdot \sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} \cdot \sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int \sec^2\theta \cdot \csc\theta\, d\theta = \int (\tan^2\theta + 1)\cdot \csc\theta\, d\theta = \int \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta + \int \csc\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{-du}{u^2} + \int \csc\theta\, d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta| + \frac{1}{u} + c$$

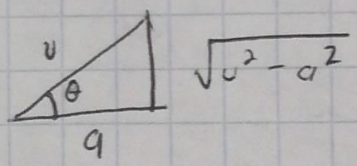


$\longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + \sqrt{1+x^2} + c$$

Historia del tiempo
De agujeros negros y otros mundos } Hawking
Las constantes de la naturaleza
Político para amador → F. Savater
Epidemia

Caso 3 En el integrando aparece la expresión $\sqrt{u^2-a^2}$
En este caso se propone $u = a \cdot \sec\theta$



Ejemplos

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-16}}$$

$u^2 = t^2 \rightarrow u = t \rightarrow du = dt$
$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$
Se propone: $u = 4\sec\theta$
$du = 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\int \frac{4\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{16\sec^2\theta\sqrt{16(\sec^2\theta-1)}}$$

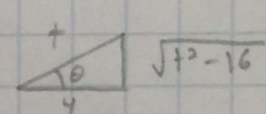
$$\frac{1}{16}\int \frac{\cancel{\sec\theta}\ \cancel{\tan\theta}\ d\theta}{\sec^{\cancel{2}}\theta\sqrt{\tan^2\theta}}$$

$$\frac{1}{16}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{16}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{16} + c$$

Como $t = 4\sec\theta$

$\sec\theta = \frac{t}{4}$ $\therefore$ $\cos\theta = \frac{4}{t} \rightarrow$



$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{t^2-16}}{t}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\, dx$$

$u^2 = x^2 \rightarrow u = x \rightarrow du = dx$
$a^2 = 7 \rightarrow a = \sqrt{7}$
Se propone: $u = \sqrt{7}\sec\theta$ $\therefore$ $du = \sqrt{7}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{7}\,\sec\theta \cdot \sqrt{7}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{7\sec^2\theta - 7}}$$

$$\int \frac{\sqrt{7}\,\sec\theta \cdot \sqrt{7}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{7(\sec^2\theta - 1)}}$$

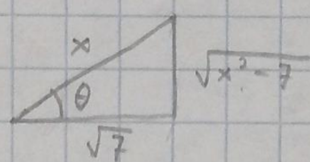
$$\int \frac{\sqrt{7}\,\sec\theta \cdot \sqrt{7}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{\tan^2\theta}}$$

$$\sqrt{7} \int \frac{\sec^2\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{\cancel{\tan\theta}}$$

$$\sqrt{7} \int \sec^2\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{7} \cdot \tan\theta + c$$

Como $x = \sqrt{7}\sec\theta \rightarrow \sec\theta = \dfrac{x}{\sqrt{7}} \rightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{x}$



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{\sqrt{7}}$$

$$\cancel{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{\cancel{\sqrt{7}}} + c$$

$$\sqrt{x^2 - 7} + c$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{(x^5)\sqrt{9x^2-1}}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{(x^5)\sqrt{9(x^2-\frac{1}{9})}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{3x^5\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}}$$

$u^2 = x^2 \quad u = x \quad du = dx$

$a^2 = \frac{1}{9} \quad a = \frac{1}{3}$

Se propone: $u = \frac{1}{3} \cdot \sec\theta \quad du = \frac{1}{3} \cdot \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\frac{1}{3} \cdot \sec\theta \tan\theta \, d\theta}{3\sec^5\theta \sqrt{\sec^2\theta - \frac{1}{9}}}$$

Sean $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$

$$\int_a^b \frac{\sec\theta \tan\theta \, d\theta}{9\sec^5\theta \sqrt{\sec^2\theta - \frac{1}{9} - \frac{8}{9} + \frac{8}{9}}} = \int_a^b \frac{\sec\theta \tan\theta \, d\theta}{9\sec^5\theta \sqrt{\sec^2\theta - 1 + \frac{8}{9}}}$$

$$\int_a^b \frac{\tan\theta \, d\theta}{9\sec^4\theta \sqrt{\tan^2\theta + \frac{8}{9}}}$$

07/05/2019

Integración por Fracciones Parciales

Estamos interesados en evaluar integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde el grado de $P(x)$ es menor al grado de $Q(x)$

Para hacer esto se requiere escribir a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones parciales donde los denominadores de tales fracciones que se obtienen al factorizar $Q(x)$ son lineales o cuadráticos

Una vez hecha la factorización, consideramos 4 casos

- Factores lineales diferentes
- " " repetidos
- " cuadraticos diferentes
- " " repetidos

Caso 1 Factores lineales diferentes

En este caso

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)$$

Para este caso escribimos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(a_k x + b_k)}$$

donde A_1, A_2, A_n son constantes a determinar

Ejemplo

Evaluar las siguientes integrales

$$\int \frac{dy}{4y^2 - 9}$$

Solución

Hay que descomponer $\frac{1}{4y^2 - 9}$

$$\frac{1}{(2y+3)(2y-3)}$$

Para la separación, consideramos

$$\frac{1}{(2y+3)(2y-3)} = \frac{A}{2y+3} + \frac{B}{(2y-3)} \leftarrow$$ Método de la búsqueda

$$1 = \left[\frac{A}{2y+3} + \frac{B}{2y-3}\right](2y+3)\cdot(2y-3)$$

$$1 = A(2y-3) + B(2y+3)$$

$$1 = 2Ay - 3A + 2By + 3B$$

$$0y + 1 = (2A + 2B)y + (-3A + 3B)$$

Por igualdad de polinomios

$$2A + 2B = 0 \implies 2A + \frac{2}{3} + 2A = 0 \implies 4A = -\frac{2}{3} \implies A = -\frac{1}{6} \therefore B = \frac{1}{6}$$

$$-3A + 3B = 1 \implies 3B = 1 + 3A \implies B = \frac{1}{3} + A$$

$$\frac{-\frac{1}{6}}{2y+3} + \frac{\frac{1}{6}}{2y-3}$$

$$\int \left[\frac{\frac{1}{6}}{2y-3} - \frac{\frac{1}{6}}{2y+3} \right] dy$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{2y-3} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{2y+3}$$

$$\frac{1}{12}\int \frac{2dy}{2y-3} - \frac{1}{12}\int \frac{2dy}{2y+3}$$

$$\frac{1}{12}(\ln|2y-3|) - \frac{1}{12}(\ln|2y+3|)$$

$$\frac{1}{12}(\ln|2y-3| - \ln|2y+3|)$$

$$\frac{1}{12} \cdot \ln\left|\frac{2y-3}{2y+3}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$$

Solución

$$x^2+4x+3 = x^2+x+3x+3$$
$$x(x+1)+3(x+1)$$
$$(x+3)(x+1)$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} = Ax+A+Bx+3B$$

$$(A+B)x+(A+3B) = 0x+1$$

$$A+B=0 \qquad -3B+1+B=0 \Rightarrow -2B=-1 \div 2B=1$$
$$A+3B=1 \Rightarrow A=-3B+1$$

$$B=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad A=-\frac{1}{2} \qquad \left\{ \frac{-\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right.$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$\frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x+3|)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + c$$

08/05/2019

$$\int \frac{x^2+2x-6}{x^3-x}\,dx$$

$$\frac{x^2+2x-6}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{A(x^2-1)+B(x^2-x)+C(x^2+x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{(A+B+C)x^2+(C-B)x+(-A)}{x(x+1)(x-1)}$$

$A+B+C=1 \nearrow A+B+2+B=1 \Rightarrow 6+2+2B=1 \quad B=-\frac{7}{2}$

$C-B=2 \Rightarrow C=2+B$

$-A=-6 \Rightarrow A=6$

$C=2-\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{2}-\frac{7}{2} \quad C=-\frac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} A=6 \\ B=-\frac{7}{2} \\ C=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \frac{6}{x}+\frac{-\frac{7}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}$$

$$\int\left[\frac{6}{x}+\frac{-\frac{7}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}\right]dx$$

$$6\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$6\cdot\ln|x|-\frac{7}{2}\cdot\ln|x+1|-\frac{3}{2}\cdot\ln|x-1|+c$$

Caso 2: Factores lineales repetidos

$$\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx$$

$$\frac{x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$$

$$\frac{(A)x+2A+B}{(x+2)^2}$$

$A = 1$

$2A + B = 0 \Longrightarrow B = -2$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} \quad \text{integrando} \quad \frac{2}{x+2} + \ln|x+2| + c$$

$$\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}\,dx$$

$$\frac{4x^2+2x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$$

$A + C = 4 \Longrightarrow C = 1$

$A + B = 2 \Longrightarrow A = 3$

$B = -1$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \quad \text{integrando} \quad 3\ln|x| + \frac{1}{x} + 1\ln|x+1| + c$$

x^{-2}

$\frac{x^{-1}}{-1}$

$-\frac{1}{x}$

$$\int_1^5 \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2}{x^2(x+1)} = \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^3+x^2}$$

$A + C = 0 \Longrightarrow C = -2$

$A + B = 1 \Longrightarrow A = 2$

$B = -1$

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x+1} \quad \text{integrando} \quad 2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x+1| \Big|_1^5$$

$$-0.165 + 0.386 = 0.222$$

Caso 3 Factores cuadraticos no repetidos

$$\int \frac{x-3}{x^3+4x}\,dx$$

$$\frac{x-3}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)}$$

$A+B=0$
$C=1$
$4A=-3 \Rightarrow B=\frac{3}{4}$

$$\cancel{\frac{4}{x} + \frac{-4x+1}{x^2+4} = \frac{4}{x} - \frac{4x-1}{x^2+4}} \qquad \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{4}x+1}{x^2+4}$$

$$-\frac{3}{4x} + \frac{\frac{3}{4}x+1}{x^2+4}$$

integrando:

$$\frac{3}{4}\int\frac{x}{x^2+4}\,dx + \int\frac{dx}{x^2+4} - \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3}{8}\cdot\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}\ln|x| + c$$

$$\int\frac{x^2}{16-x^4}\,dx$$

$$\frac{x^2}{(4-x^2)(4+x^2)} = \frac{x^2}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}$$

$$\frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} + \frac{Cx+D}{4+x^2}$$

$$\frac{8A+2Ax^2+4Ax+Ax^3+8B+Bx^2-4Bx-Bx^3+4Cx-Cx^3+4D-Dx^2}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}$$

$$\frac{(A-B-C)x^3+(2A+2B-D)x^2+(4A-4B+4C)x+(8A+8B+4D)}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}$$

$A-B-C=0$ $\qquad$ $8A+8B+4D=0$
$2A+2B-D=1$
$4A-4B+4C=0$

$8+2x^2+4x+x^3$ $\qquad$ $8+2x^2-4x-x^3$

16/05-/2019

Haciendo mucha álgebra xd:

$A = \frac{1}{8}$ $B = \frac{1}{8}$ $C = 0$ $D = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{8}\int\frac{dx}{2-x} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{2+x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{4+x^2}$$

$$\frac{1}{8}\ln|2+x| - \frac{1}{8}\ln|2-x| - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + c$$

$$\int\frac{2x^2+3}{x^4+2x^2+1}\,dx$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(A)x^3+(B)x^2+(A+C)x+B+D}{(x^2+1)^2}$$

$A = 0$

$B = 2$

$A + C = 0 \Longrightarrow C = 0$

$B + D = 3 \Longrightarrow D = 1$

$$\frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$2\int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$2\tan^{-1}x + \ldots$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow \int\frac{dv}{(v^2+a^2)^2}$$

$v = a\tan\theta$ $v^2 = x^2 \therefore v = x$

$a^2 = 1 \therefore a = 1$

$v = a\tan\theta$ $dv = a\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2} \rightarrow \int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = \int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}$$

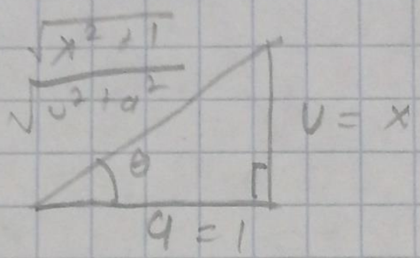
$\tan\theta = \frac{CO}{CA} \rightarrow \tan\theta = \frac{x}{1}$

$\theta = \tan^{-1} x$

$\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \cos^2\theta \, d\theta$

$\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\theta) + c$

$\tan\theta = \frac{u}{a}$ y $\tan\theta = \frac{CO}{CA}$



$\operatorname{sen}\theta = \frac{CO}{H} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \cos\theta = \frac{CA}{H} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$

$\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} x + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}$

$\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} x + \frac{2}{2x^2+2} + c$

20/05/2024

Unidad 4 Aplicaciones de la integral

Serie de Taylor

Para el estudio de las series se requiere el concepto de sucesión

Una sucesión es una función

$a_n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada elemento
$n \longmapsto a_n$

de los naturales le asocia un elemento en los reales

Por ejemplo:

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right\}$

b) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots\} = \{-1, 1\}$

c) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \dots\right\}$

d) $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots\}$

De estos 4 ejemplos, podemos observar algunas características de las sucesiones

I) Una sucesión se dice creciente si $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq 1$. En caso contrario, diremos que es decreciente

Así, por ejemplo para el d) $n < n+1$ para todo $n \geq 1$ por tanto, la sucesión es creciente

Para a) $n < n+1$ para $n \geq 1$ entonces $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n}$ Para todo $n \geq 1$. Por tanto, la sucesión es decreciente

Para c) de el hecho de que:

$$1 > 0 \rightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$$
$$(n+1)^2 > n(n+2)$$
$$\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$$

Por tanto, la sucesión es decreciente

II) Para la sucesión $\{a_n\}$, si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, se dice que la sucesión es convergente y que converge al valor L

Así, para a): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Por tanto, la sucesión es convergente y converge a 0

Para c): $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$

La sucesión es convergente y converge a 1

Nota: Cuando una sucesión no es convergente, se dice que es divergente, como d)

Existen otros conceptos de sucesiones que no veremos

Ahora consideremos:

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4 \dots\}$

formemos una nueva sucesión:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$

$S_{n-1} = S_{n-2} + a_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_n$

Así, nuestra nueva sucesión es:

$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3 \dots\}$

¿Es convergente?

¿Bajo qué condiciones es convergente?

21/05/2019

Definicion

Si $\{a_n\}$ es una sucesión y $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_n$ entonces S_n se llama serie infinita

Nota: Una serie infinita se representa por medio de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

donde los números $a_0, a_1, a_2 \dots$ se les denomina términos de la serie y a $S_1, S_2, S_3 \dots$ son las sumas parciales de la serie infinita

Así por ejemplo

$$\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

luego

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = S_2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$\{S_n\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8} \dots\}$ es la serie infinita representada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ahora, para responder la pregunta consideremos lo siguiente

Definición

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ esta serie una serie infinita y $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales que definen la serie infinita

I - Si existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y S es la suma de la serie infinita

II Si no existe el límite, la serie es divergente y no tiene suma

Observación para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

Del álgebra sabemos

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 \dots a^1 b^{n-2} + a^0 b^{n-1})$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \frac{1}{2^{n-1}}$$

y como $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{S_n}$$

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Como $S_n = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Definición

Una serie de potencias en $x-a$ es una serie de la forma

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots C_n(x-a)^n$$

$$\sum_{n=\bullet}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

Observación

Si x es un número específico por ejemplo 1, la serie se convierte en una serie de términos constantes

Si $a=0$, la serie se convierte en serie de potencias de x

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

Obvio si $x=0$, la serie es convergente

22-05-2019

Series de Taylor y de Maclaurin

Supongamos que $\sum c_k (x-a)^k$ es una serie de potencias centrada en a y que tiene un intervalo de convergencia r distinto de 0

¿Podemos expandir una función infinitamente diferenciable como $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x ... en serie de potencias $\sum c_k (x-a)^k$ que converge al valor correcto de $f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto $(a-r, a+r)$. donde $r>0$ o $r=\infty$?

Supongamos entonces que la función f es infinitamente diferenciable sobre un intervalo $(a-r, a+r)$ puede

x^x

representarse como una serie de potencias $\sum c_k (x-a)^k$

Empecamos derivando

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

Como: $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 \dots$

Al derivar $c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 \dots + nc_n(x-a)^{n-1} \dots$

Nuevamente

Generalizando: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Así:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots$$

La serie anterior se le conoce como serie de Taylor de f en a o centrada en a

La serie de Taylor centrada en $x=0$ se llama serie de Maclaurin

24-05-2019

Series de Maclaurin

Intervalos de convergencia

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} \dots \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ $(-\infty, \infty)$

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \dots \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $(-\infty, \infty)$

$\text{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \dots \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $(-\infty, \infty)$

$\tan^{-1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} \dots \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ $[-1, 1]$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (-\infty, \infty)$$

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad [-1, 1]$$

Comprobar que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$a = 0$

Observar:

$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x \ldots f^{(n)}(x) = e^x$

Σ es igual a

$$\frac{e^0}{0!}(1) + \frac{e^0}{1!} x + \frac{e^0}{2!} x^2 \ldots$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Por lo que es verídico

Comprobar que:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Solución

$$a=0 \to \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Observar:

$f'(x) = \cos x$ $\qquad$ $f^5(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $f^6(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $f^7(x) = -\cos x$

$f^4(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $f^8(x) = \operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen} x = \cancelto{0}{\frac{f(0)}{0!} x^0} + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \cancelto{0}{\frac{f''(0)}{2!} x^2} + \frac{f^3(0)}{3!} x^3 + \cancelto{0}{\frac{f^4(0)}{4!} x^4} +$$

$$\frac{f^5(0)}{5!} x^5 + \cancelto{0}{\frac{f^6(0)}{6!} x^6} + \frac{f^7(0)}{7!} x^7 + \cancelto{0}{\frac{f^8(0)}{8!} x^8} + \frac{f^9(0)}{9!} x^9 \ldots$$

Los de potencias pares llevan función sen y $\operatorname{sen} 0 = 0$

Obtenemos:

$$\frac{\cos(0)}{1!} x + \frac{\cos(0)\, x^3}{3!} + \frac{\cos(0)\, x^5}{5!} - \frac{\cos(0)\, x^7}{7!} + \frac{\cos(0)\, x^9}{9!} \ldots$$

Esto es igual a:

$$\frac{1}{1!} x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9.$$

Podemos escribirlo como

$$\frac{1}{[2(0)+1]!} x^{2(0)+1} - \frac{1}{[2(1)+1]!} x^{2(1)+1} + \frac{1}{[2(2)+1]!} x^{2(2)+1} \ldots$$

Finalmente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y probamos así su veracidad

27-05-2010

Ejemplos de Aplicacion al calculo

1- $\int \text{sen}(x^2)\, dx$

Solucion

como

$$\text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

entonces

$$\text{sen}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \frac{1}{7!}x^{14} + \dots$$

Asi:

$$\int \text{sen}(x^2)\, dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2}\, dx$$

$$= \int \left[x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \frac{1}{7!}x^{14} + \dots \right] dx$$

$$\int x^2\, dx - \frac{1}{3!}\int x^6\, dx + \frac{1}{5!}\int x^{10}\, dx - \frac{1}{7!}\int x^{14}\, dx$$

Asi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \int x^{4k+2}\, dx \right]$$

De esta manera:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \left[\frac{1}{(4k+2)+1} \cdot x^{(4k+2)+1} \right] + c$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(4k+3)} x^{4k+3} + c$$

Nota Si se tiene

a) $$\int_0^1 \text{sen}(x^2)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(4k+3)} x^{4k+3} \Big|_0^1$$

esto es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(4k+3)} - 0$

$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx \underline{0.31}$

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$

$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u^k \quad , \quad |u| < 1$

tomando

$u = x^4$ tenemos

$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^4)^k$

Entonces

$\int \frac{dx}{1+x^4} = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; x^{4k} \; dx$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{4k} \; dx$

NOTA: La integral no está multiplicando a la suma, la integral está dentro de la suma

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{4k+1} \cdot x^{4k+1} + c$

Así

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} x^{4k+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{4k}\,(4k+1)}$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{80} + \frac{1}{2304} \cdots\right] \approx 0.4939$

18-05-2019

Calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

Solución

Como $\ln x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (x-1)^{k+1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot (x-1)^{k+1}}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x-1)^k}{k+1}$$

Ahora evaluamos con $k=0$

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{1}(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-1)^k}{k+1} \right]$$

$$\lim_{x \to 1} 1 + \lim_{x \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-1)^k}{k+1}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to 1} \frac{(-1)^k (x-1)^k}{k+1}$$

evaluando

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cancel{(1-1)^k} \to 0}{k+1} = 1+0 = \underline{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \tan(x)}{x^3}$$

Primero hay que calcular la serie de la tangente

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = \tan^2 x + 1$

$f''(x) = 2\tan^3 x + 2\tan x$

$f^{(3)}(x) =$

$f^{(4)}(x) =$

$f^{(5)}(x) = 120 \tan^6(x) + 240 \tan^4(x) + 136 \tan^2(x) + 16$

$f(0) = \tan(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\text{sen}(x)}$$

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{k!} \quad y \quad \text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$e^{x}-e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k}}{k!}$$

Como $(-x)^{k} = (-1\cdot x)^{k} = (-1)^{k}\cdot(x)^{k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}(x)^{k}}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^{k}}{k!}\right] x^{k}$$

Aqui se evalúa y se watcha que en k impar, los términos se hacen 0 y tenemos:

$$\frac{2}{1!} + \frac{2x^{3}}{3!} + \frac{2x^{5}}{5!} + \frac{2x^{7}}{7!} \cdots$$

$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

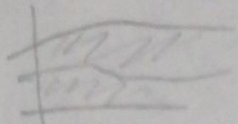
Entonces

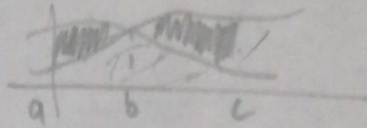
$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{\text{sen } x} = \frac{2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

$$= \frac{2\left(x + \frac{1}{3!}x^{3} + \frac{1}{5!}x^{5} + \frac{1}{7!}x^{7} \cdots\right)}{\left(x - \frac{1}{3!}x^{3} + \frac{1}{5!}x^{5} + \frac{1}{7!}x^{7} \cdots\right)}$$

$$2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^{3}}{3!} \cdots\right)}{\left(x - \frac{x^{3}}{3!} \cdots\right)} \underset{\text{evaluando}}{=} 2\left(\frac{1+0+0+0+0\cdots}{1-0+0-0+0\cdots}\right)$$

$$= 2$$

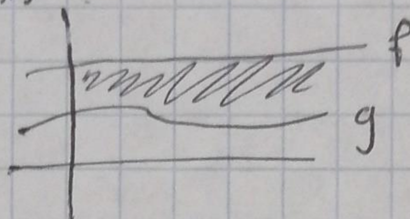




Area de una región entre dos curvas

Sumas de Riemann
Integral definida

Si $f(x) > g(x)$



Entonces

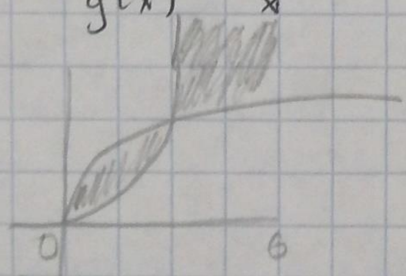
$$= (f-g)(x)$$

Ejemplos

Calcular el área entre $f(x)$ y $g(x)$ en $[a, b]$

a) $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = x^2$

$\sqrt[4]{64}$
$\sqrt[4]{64}$
4

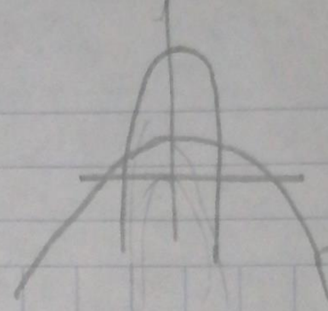


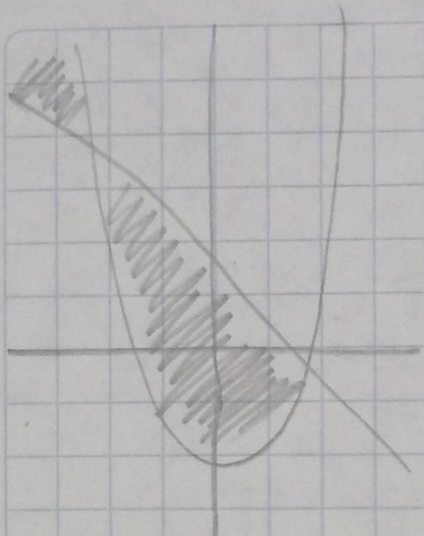
$[0, 1]$

$$\int \sqrt{x} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \qquad \frac{2}{3}$$

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) $y = x^2 - 2$ $\quad [-4, 2]$
$y = 4 - x$





$[-4, 2]$

$$\int_{-4}^{2} f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \int_{-4}^{-3} (x^2-2) - (4-x)\, dx + \int_{-3}^{2} (4-x) - (x^2-2)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x - \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{-3} + 4x - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_{-3}^{2}$$

~~$-5.333 - (4.5) +$~~

~~$4.5 - (-5.333) +$~~

$(13.5 - 10.666) + (7.333 - (-13.5))$

23.667

c) $y_1 = 4(1-x^2) = y = 4 - 4x^2$

$y_2 = 1 - x^2$

~~Con $y_1 = 0$~~ Para encontrar sus puntos de corte:

$4 - 4x^2 = 1 - x^2$

$0 = 3x^2 - 3$

$0 = 3(x^2 - 1)$

$0 = (x+1)(x-1)$

$x = -1 \quad x = 1$

$4 - 4x^2$ es mayor

$$\int_{-1}^{1} (4-4x^2) - (1-x^2)\, dx$$

$[\quad \overset{*}{x_k} \quad]$
$x_{k-1} \quad x_k^* \quad x_k \quad y = 3$ $\qquad Y = 3x$ $\qquad 0 - 3$

$$4x - \frac{4x^3}{3} - x + \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1}$$

$$3x - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} \Big|_{-1}^{1}$$

$$3x - x^3 \Big|_{-1}^{1}$$

$$(3-1) - (-3+1)$$

$$2 - (-2)$$

$$4$$

Volumenes de solidos de revolución

Si $A(x)$ es el área de la sección plana de S perpendicular al eje x en el punto x y si Δ es una partición de $[a, b]$ con n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y un número x_k^* que estén en él subintervalo
Como las sumas de Riemann

Sea S un sólido tal que S está entre dos planos perpendiculares al eje x en a y b

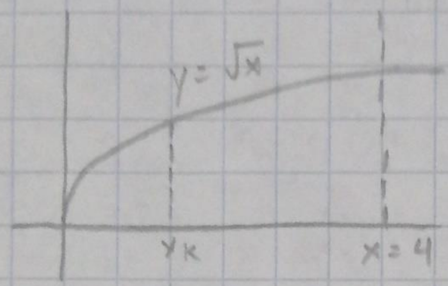
$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b A(x)\, dx$$

$$\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido que se forma ~~la~~ al girar alrededor del eje x, la región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

$V = A_B \cdot h$ $\qquad A_B = \pi \cdot r^2$

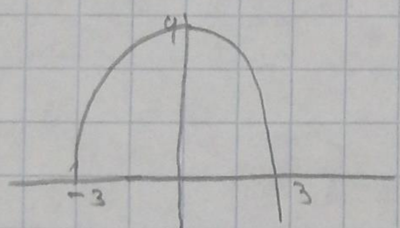
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



$V = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$

$y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad$ eje x

Solución:



Sabemos que $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

$$V = \pi \cdot \int_{-3}^{3} 81 - 18x^2 + x^4 \, dx$$

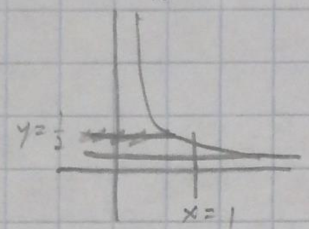
$$\pi \cdot \left(81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right) \Big|_{-3}^{3}$$

$$81\pi x - 6\pi x^3 + \frac{\pi x^5}{5} \Big|_{-3}^{3}$$

$$\frac{648\pi}{5} - \left(-\frac{648\pi}{5}\right)$$

$$\frac{1296\pi}{5} \quad u^3$$

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2}$, eje x , $x = 1$



Si $y = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$ $\therefore$ $x = 2$

Los límites son $x = 1$, $y = 2$

$$\pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$$

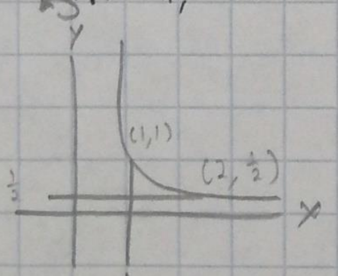
$$\pi \cdot -\frac{1}{x} \Big|_1^2$$

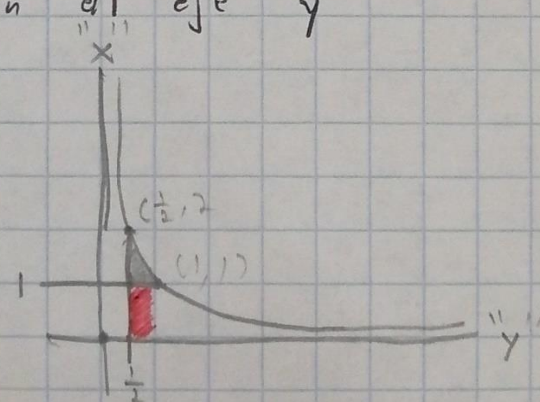
$$-\frac{\pi}{x} \Big|_1^2 \rightarrow -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{1}\right)$$

u^3

$$\frac{\pi}{2}$$

Ahora, en relación al eje y





Queremos el área gris, la roja no

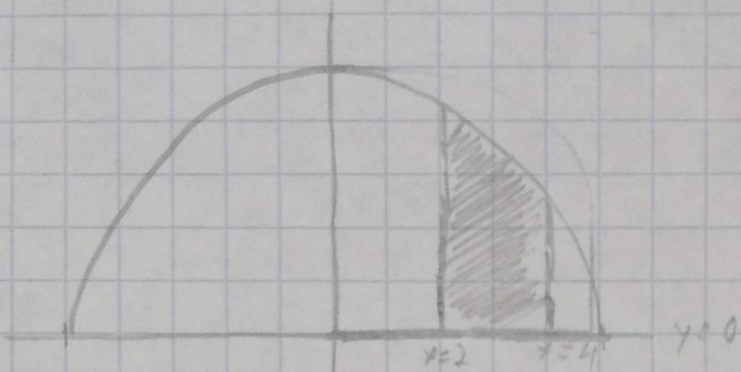
$x = \frac{1}{y}$ $\quad$ "$y = \frac{1}{x}$" $\longrightarrow$ $y = \frac{1}{x} - 1$

$$\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} - 1\, dx = \pi\left(-\frac{1}{x} - x\right)\Big|_{1/2}^1$$

$$-\frac{\pi}{x} - \pi x \Big|_{1/2}^1 = \left(-\pi - \pi\right) - \left(-2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Determinar el volumen del sólido

$y = \sqrt{25 - x^2}$ $\quad y = 0 \quad x = 2 \quad x = 4$ sobre el eje x

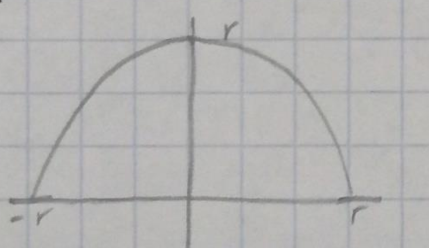


$$\pi \cdot \int_2^4 25 - x^2 \, dx$$

$$\pi \cdot \left(25x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_2^4$$

$$\frac{94}{3}\pi$$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad y = 0 \quad x = -r, \quad x = r$, sobre el eje x



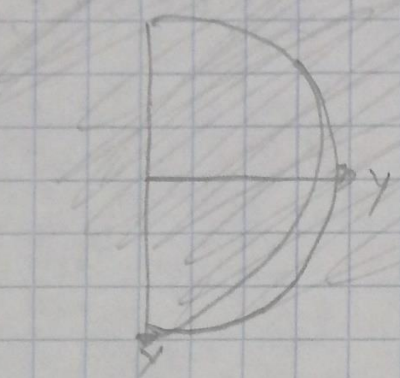
$$\pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$2\pi \cdot \int_0^r r^2 - x^2 \, dx$$

$$2\pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^r$$

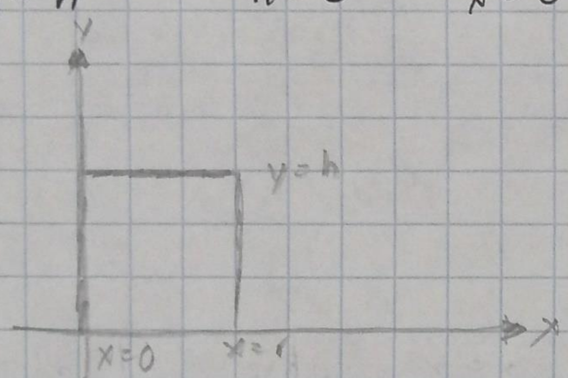
$$2\pi \cdot r^3 - \frac{r^3}{3} - (\cancel{-2\pi} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

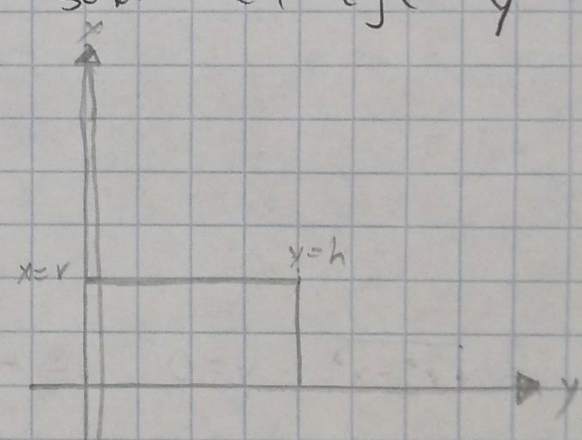
Ahora en el eje y



$x = \sqrt{r^2 - y^2}$

$y = h$ $\quad h > 0 \quad x = 0 \quad x = r$ sobre el eje y





$$\pi \cdot \int_0^h (r)^2 \, dy$$

$$\pi \cdot r^2 y \Big|_0^h$$

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$