Universidad Autónoma
de Aguascalientes

Centro de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Física

Álgebra Lineal

3º "A"

Cuaderno de Ejercicios

Profesor: Jaime Trujillo Domínguez

Alumno: Joel Alejandro Espinoza Sánchez

Fecha de Realización: 14-Agosto-2019

Ejercicios en Clase 1: Soluciones de un Sistema de dos ecuaciones

Ejercicios resueltos en colaboración con:
- Almeida Ortega Andrea Melissa
- Ordaz de Vierna Andrea Joliett
- Orocio García Hiram Efraín
- Pérez Jaime Julio César

Determinar la solución (si la hay) de los siguientes sistemas:

1.- $4x + 5y = 0$
$-2x - y = 3$

Consideremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $b_1 = 0$, $x_1 = x$
$a_{21} = -2$, $a_{22} = -1$, $b_2 = 3$, $x_2 = y$

Sabemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-1)(0)-(5)(3)}{(4)(-1)-(5)(-2)}, \frac{(4)(3)-(-2)(0)}{(4)(-1)-(5)(-2)}\right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{0-15}{-4+10}, \frac{12-0}{-4+10}\right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{15}{6}, \frac{12}{6}\right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{5}{2}, 2\right)$$

2.- $7x - 4y = 1$
$-x + \frac{4}{7}y = -3$

Consideremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = 7$, $a_{12} = -4$, $b_1 = 1$, $x_1 = x$
$a_{21} = -1$, $a_{22} = \frac{4}{7}$, $b_2 = -3$, $x_2 = y$

Sabemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{\left(\frac{4}{7}\right)(1) - (-4)(-3)}{(7)\left(\frac{4}{7}\right) - (-4)(-1)}, \frac{(7)(-3) - (-1)(1)}{(7)\left(\frac{4}{7}\right) - (-4)(-1)} \right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{\frac{4}{7} - 12}{4 - 4}, \frac{-21 + 1}{4 - 4} \right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{-\frac{80}{7}}{0}, \frac{-20}{0} \right)$$

De lo anterior, se determina:

$$S = \emptyset$$

3.- $x + \frac{1}{2} y = \frac{5}{2}$

$-2x - y = -5$

Consideremos:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = 1$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = x$

$a_{21} = -2$, $a_{22} = -1$, $b_2 = -5$, $x_2 = y$

Sabemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-1)\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(-5)}{(1)(-1) - \left(\frac{1}{2}\right)(-2)}, \frac{(1)(-5) - (-2)\left(\frac{5}{2}\right)}{(1)(-1) - \left(\frac{1}{2}\right)(-2)} \right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}}{-1 + 1}, \frac{-5 + 5}{-1 + 1} \right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0} \right)$$

De lo anterior se determina:

$$(x, y) = (x, -2x + 5), \quad x \in \mathbb{R}$$

Es decir, tiene un número infinito de soluciones

Fecha de Realización: 16-Agosto-2019

Ejercicios en Clase 1: Comprobación por Determinantes

Usando determinantes, obtener la solución (si la hay) del sistema:

1.- $4x + 5y = 0$

$-2x - y = 3$

Tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{0 - 15}{-4 + 10} \qquad y = \frac{12 - 0}{-4 + 10}$$

$$x = -\frac{15}{6} \qquad y = \frac{12}{6}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{5}{2}, 2\right)$$

2.- $7x - 4y = 1$

$-x + \frac{4}{7}y = -3$

Tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{\frac{4}{7} - 12}{4 - 4} \qquad y = \frac{-21 + 1}{4 - 4}$$

$$x = \frac{-\frac{80}{7}}{0} \qquad y = \frac{-20}{0}$$

$$S = \emptyset$$

3.- $x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2}$

$-2x - y = -5$

Tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}}{-1 + 1} \qquad y = \frac{-5 + 5}{-1 + 1}$$

$x = \frac{0}{0}$ $y = \frac{0}{0}$

El sistema tiene un número infinito de soluciones donde:

$(x, y) = (x, -2x+5), \quad x \in R$

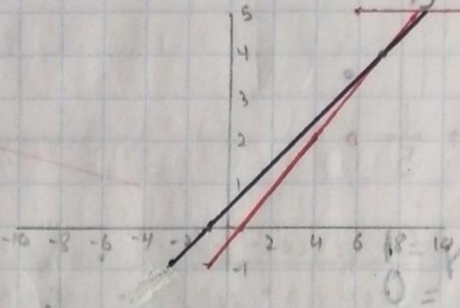
Fecha de Entrega: 19 - Agosto - 2019

Tarea 1: Graficar un sistema de ecuaciones 2×2

Despejar y graficar en un mismo eje coordenado el sistema dado

1.- $-x + 2y = 1$
$3x - 5y = 1$

$-x + 2y = 1 \longrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ $3x - 5y = 1 \longrightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$

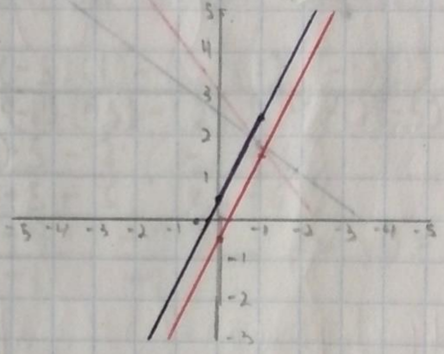


(7, 4)

2.- $-4x + 2y = 1$
$4x - 2y = 1$

$y = 2x + \frac{1}{2}$ •

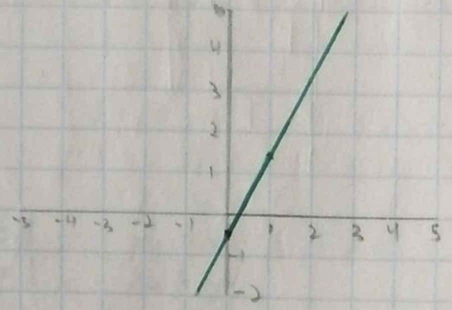
$y = 2x - \frac{1}{2}$ •



3.- $-4x + 2y = -1$
$4x - 2y = 1$

$y = 2x - \frac{1}{2}$ •

$y = 2x - \frac{1}{2}$ •

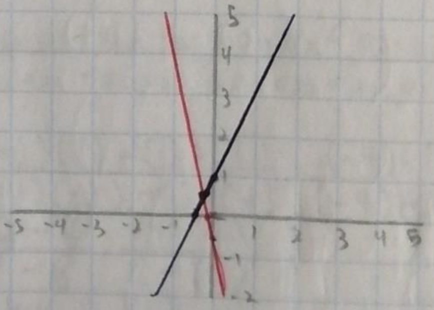


4.- $7x - 3y = -3$
$-9x - 2y = 1$

$y = \frac{7x}{3} + 1$ •

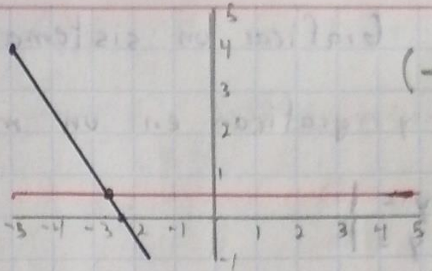
$y = -\frac{9x}{2} - \frac{1}{2}$ •

(-0.2195, 0.4878)



5.- $-2y - 3x = 7$
$-9y + 5y = -2$

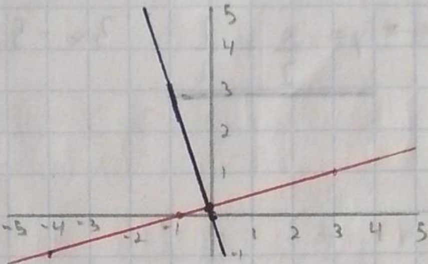
$-3x - 2y = 7 \Longrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ •
$-4y = -2 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$ •



(-2.666, 0.5)

6.- $\pi x + y = 0$
$\sqrt{2}x - 5y = -1$

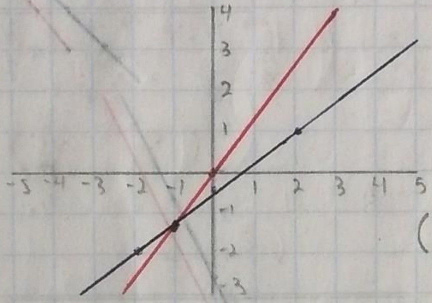
$y = -\pi x$ •
$y = \frac{\sqrt{2}x}{5} + \frac{1}{5}$ •



(-0.0584, 0.183)

7.- $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 1$
$\sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0$

$\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = y$ •
$\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}} = y$ •



(-0.866, -1.118)

Fecha de Entrega: 19-Agosto-2019

Tarea 2: Resolución de un sistema de dos ecuaciones bajo resolución regular

Mediante resolución regular, encontrar las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas:

1.- $-x+2y=1$
$3x-5y=1$

Consideremos:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

Donde:

$a_{11}=-1$, $a_{12}=2$, $b_1=1$, $x_1=x$
$a_{21}=3$, $a_{22}=-5$, $b_2=1$, $x_2=y$

Sabemos que:

$$(x_1,x_2)=\left(\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)$$

Sustituyendo:

$$(x,y)=\left(\frac{(-5)(1)-(2)(1)}{(-1)(-5)-(2)(3)},\frac{(-1)(1)-(3)(1)}{(-1)(-5)-(2)(3)}\right)$$
$$(x,y)=\left(\frac{-5-2}{+5-6},\frac{-1-3}{+5-6}\right)$$
$$(x,y)=\left(\frac{-7}{-1},\frac{-4}{-1}\right)\rightarrow(x,y)=(7,4)$$

2.- $-4x+2y=1$
$4x-2y=1$

Consideremos:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

Donde:

$a_{11}=-4$, $a_{12}=2$, $b_1=1$, $x_1=x$
$a_{21}=4$, $a_{22}=-2$, $b_2=1$, $x_2=y$

Sabemos que:

$$(x_1,x_2)=\left(\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)$$

Sustituyendo:

$$(x,y)=\left(\frac{(-2)(1)-(2)(1)}{(-4)(-2)-(2)(4)},\frac{(-4)(1)-(4)(1)}{(-4)(-2)-(2)(4)}\right)$$
$$(x,y)=\left(\frac{-2-2}{8-8},\frac{-4-4}{8-8}\right)$$
$$(x,y)=\left(-\frac{4}{0},-\frac{8}{0}\right)$$
$$\therefore\quad S=\emptyset$$

3.- $-4x + 2y = -1$

$4x - 2y = 1$

Consideremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = -4$, $a_{12} = 2$, $b_1 = -1$, $x_1 = x$

$a_{21} = 4$, $a_{22} = -2$, $b_2 = 1$, $x_2 = y$

Tenemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-2)(-1) - (2)(1)}{(-4)(-2) - (2)(4)}, \frac{(-4)(1) - (4)(-1)}{(-4)(-2) - (2)(4)} \right)$$
$$(x, y) = \left(\frac{2 - 2}{8 - 8}, \frac{-4 + 4}{8 - 8} \right)$$
$$(x, y) = \left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0} \right)$$

El sistema tiene un número infinito de soluciones donde:

$$(x, y) = (x, 2x - \tfrac{1}{2}), \quad x \in R$$

4.- $7x - 3y = -3$

$-9x - 2y = 1$

Consideremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = 7$, $a_{12} = -3$, $b_1 = -3$, $x_1 = x$

$a_{21} = -9$, $a_{22} = -2$, $b_2 = 1$, $x_2 = y$

Tenemos que:

$$(x_1; x_2) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-2)(-3) - (-3)(1)}{(7)(-2) - (-3)(-9)}, \frac{(7)(1) - (-9)(-3)}{(7)(-2) - (-3)(-9)} \right)$$
$$(x, y) = \left(\frac{6 + 3}{-14 - 27}, \frac{7 - 27}{-14 - 27} \right)$$
$$(x, y) = \left(\frac{9}{-41}, \frac{-20}{-41} \right) = \left(-\frac{9}{41}, \frac{20}{41} \right)$$
$$(x, y) = \left(-\frac{9}{41}, \frac{20}{41} \right)$$

5= $-2y - 3x = 7$

$-9y + 5y = -2$

$-3x - 2y = 7$

$-4y = -2$

Consideremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = -3$, $a_{12} = -2$, $b_1 = 7$, $x_1 = x$

$a_{21} = 0$, $a_{22} = -4$, $b_2 = -2$, $x_2 = y$

Tenemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-4)(7) - (-2)(-2)}{(-3)(-4) - (-2)(0)}, \frac{(-3)(+2) - (0)(7)}{(-3)(-4) - (-2)(0)}\right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{-28 - 4}{12 + 0}, \frac{+6 - 0}{12 + 0}\right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{32}{12}, \frac{6}{12}\right) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

6= $\pi x + y = 0$

$\sqrt{2}x - 5y = -1$

Consideremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Donde:

$a_{11} = \pi$, $a_{12} = 1$, $b_1 = 0$, $x_1 = x$

$a_{21} = \sqrt{2}$, $a_{22} = -5$, $b_2 = -1$, $x_2 = y$

Tenemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-5)(0) - (1)(-1)}{(\pi)(-5) - (1)(\sqrt{2})}, \frac{(\pi)(-1) - (\sqrt{2})(0)}{(\pi)(-5) - (1)(\sqrt{2})}\right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{0 + 1}{-5\pi - \sqrt{2}}, \frac{-\pi - 0}{-5\pi - \sqrt{2}}\right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{5\pi + \sqrt{2}}, \frac{\pi}{5\pi + \sqrt{2}}\right)$$

7.- $\sqrt{3}\,x - \sqrt{5}\,y = 1$

$\sqrt{5}\,x - \sqrt{3}\,y = 0$

Consideremos:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

Donde:

$$a_{11} = \sqrt{3}, \quad a_{12} = -\sqrt{5} \quad b_1 = 1, \quad x_1 = x$$
$$a_{21} = \sqrt{5}, \quad a_{22} = -\sqrt{3}, \quad b_2 = 0, \quad x_2 = y$$

Tenemos que:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

Sustituyendo:

$$(x, y) = \left(\frac{(-\sqrt{3})(1) - (-\sqrt{5})(0)}{(\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - (-\sqrt{5})(\sqrt{5})}, \frac{(\sqrt{3})(0) - (\sqrt{5})(1)}{(\sqrt{3}(-\sqrt{3}) - (-\sqrt{5})(\sqrt{5})} \right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{-\sqrt{3} + 0}{-3 + 5}, \frac{0 - \sqrt{5}}{-3 + 5} \right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

Fecha de Entrega: 19-Agosto-2019

Tarea 3: Resolución de un sistema de dos ecuaciones por determinantes

Encontrar las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas por determinantes:

1.- $-x+2y=1$
$3x-5y=1$

Tenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{-5-2}{5-6} \qquad y=\frac{-1-3}{5-6}$$

$$x=\frac{-7}{-1} \qquad y=\frac{-4}{-1}$$

$$(x,y)=(7,4)$$

2.- $-4x+2y=1$
$4x-2y=1$

Tenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{-2-2}{8-8} \qquad y=\frac{-4-4}{8-8}$$

$$x=-\frac{4}{0} \qquad y=-\frac{8}{0}$$

$$\therefore \quad S=\emptyset$$

3.- $-4x+2y=-1$
$4x-2y=1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{2-2}{8-8} \qquad y=\frac{-4+4}{8-8}$$

$$x=\frac{0}{0} \qquad y=\frac{0}{0}$$

El sistema tiene un número infinito de soluciones donde:

$$(x,y)=\left(x, 2x-\tfrac{1}{2}\right), \qquad x\in\mathbb{R}$$

4.- $7x - 3y = -3$
$-9x - 2y = 1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -9 & -2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -9 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{6+3}{-14-27} = \frac{9}{-41} \qquad y = \frac{7-27}{-14-27} = \frac{-20}{-41}$$

$$(x,y) = \left(-\frac{9}{41}, \frac{20}{41}\right)$$

5.- $-2y - 3x = 7$
$-9y + 5y = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-28-4}{12+0} = -\frac{32}{12} \qquad y = \frac{6-0}{12+0} = \frac{6}{12}$$

$$(x,y) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

6.- $\pi x + y = 0$
$\sqrt{2}x - 5y = -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi & 1 \\ \sqrt{2} & -5 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \pi & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi & 1 \\ \sqrt{2} & -5 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{0+1}{-5\pi-\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\pi+\sqrt{2}} \qquad y = \frac{-\pi-0}{-5\pi-\sqrt{2}} = \frac{\pi}{5\pi+\sqrt{2}}$$

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{5\pi+\sqrt{2}}, \frac{\pi}{5\pi+\sqrt{2}}\right)$$

7.- $\sqrt{3}\,x - \sqrt{5}\,y = 1$
$\sqrt{5}\,x - \sqrt{3}\,y = 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-\sqrt{3}+0}{-3+5} \qquad y = \frac{0-\sqrt{5}}{-3+5}$$

$$(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Fecha de Realización: 20-Agosto-2019

Ejercicios en Clase 2: Manipulación de matrices

Si $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 5 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & -1\\ -2 & 3 & -4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2 & 4\\ 3 & 7 & -3 & 2\\ 4 & -6 & -3 & 2\end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ -6\end{bmatrix}$ calcular:

1.- A + B

$$A+B=\begin{bmatrix}-1+5 & 2+0 & -3+(-1)\\ 2+(-2) & 5+3 & -4+(-4)\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}4 & 2 & -4\\ 0 & 8 & -8\end{bmatrix}$$

2.- A + C

La operación no se puede realizar porque la definición no se cumple para A y C

3.- 3A - 5B

$$3A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -9\\ 6 & 15 & -12\end{bmatrix},\quad -5B=\begin{bmatrix}-25 & 0 & 5\\ 10 & -15 & 20\end{bmatrix}$$

$$3A-5B=\begin{bmatrix}-28 & 6 & -4\\ 16 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

4.- Determinar $E \in M_{2\times 3}$ tal que $2A-3E=B$

$$2A-B=3E$$

$$2A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -6\\ 4 & 10 & -8\end{bmatrix},\quad -B=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

$$2A-B=\begin{bmatrix}-7 & 4 & -5\\ 6 & 7 & -4\end{bmatrix}=3E$$

$$\frac{1}{3}\cdot 3E=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7 & 4 & -5\\ 6 & 7 & -4\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3}\\ 2 & \frac{7}{3} & \frac{-4}{3}\end{bmatrix}$$

Otra forma:

$$2\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 5 & -4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & -1\\ -2 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

Fecha de Entrega: 21-Agosto-2019

Tarea 4: Matrices y vectores

Dadas las matrices A y B y el número k, calcular en cada inciso kA, kB, k(A+B), kA+kB

1.- $A=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, \quad k=4$

$$kA=4\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4(2)\\4(1)\\4(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\16\end{bmatrix}$$

$$kB=4\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4(1)\\4(-1)\\4(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-4\\8\end{bmatrix}$$

$$k(A+B)=4\left(\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4(2+1)\\4(1+(-1))\\4(4+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\0\\24\end{bmatrix}$$

$$kA+kB=\begin{bmatrix}8\\4\\16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\0\\24\end{bmatrix}$$

2.- $A=\begin{bmatrix}2&5&4\\-2&3&-1\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}5&2&-1\\3&2&2\end{bmatrix}, \quad k=8$

$$kA\ 8\begin{bmatrix}2&5&4\\-2&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&40&32\\-16&24&-8\end{bmatrix}$$

$$kB=8\begin{bmatrix}5&2&-1\\3&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40&16&-8\\24&16&16\end{bmatrix}$$

$$k(A+B)=8\left(\begin{bmatrix}2&5&4\\-2&3&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&2&-1\\3&2&2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}56&56&24\\8&40&8\end{bmatrix}$$

$$kA+kB=8\begin{bmatrix}2&5&4\\-2&3&-1\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}5&2&-1\\3&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}56&56&24\\8&40&8\end{bmatrix}$$

3.- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad k = -2$

$$kA = (-2)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -6 & -4 & 4 \\ -8 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$kB = (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -6 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$k(A+B) = (-2)\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -10 & -14 & -4 \\ -14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$kA + kB = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -6 & -4 & 4 \\ -8 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -6 & -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -10 & -14 & -4 \\ -14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

4.- Determinar los valores de a y b para que las matrices sean iguales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2a+b & 3 \\ a-b & 4 \end{bmatrix}$$

$A = B$ si

$$2a + b = 2$$
$$a - b = 5$$

Por determinantes:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$a = \frac{-2-5}{-2-1} \qquad b = \frac{10-2}{-2-1}$$

$$a = \frac{-7}{-3} \qquad b = \frac{8}{-3}$$

$$a = \frac{7}{3} \qquad b = -\frac{8}{3}$$

$A = B$ si $a = \frac{7}{3}$ y $b = -\frac{8}{3}$

Fecha de Realización: 21-Agosto-2019

Ejercicios en Clase 3: Matrices

Ejercicios resueltos en colaboración con:
- Cobian Freyre Francisco Jesús

Si $\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

Determinar a, b, c; d

$a+b=4$
$a-b=2$
Por igualación
$a=3$
$b=1$

$c-d=10$
$c+d=6$
Por igualación
$c=8$
$d=-2$

Calcular C a partir de $5A-3B+6C=0$ si:

$A=\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; $0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$5\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5(10) & 5(2) \\ 5(6) & 5(4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-3)(4) & (-3)(-3) \\ (-3)(-2) & (-3)(4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6(c_{11}) & 6(c_{12}) \\ 6(c_{21}) & 6(c_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 9 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c_{11} & 6c_{12} \\ 6c_{21} & 6c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De lo anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$50+(-12)+6c_{11}=0 \rightarrow 38+6c_{11}=0 \rightarrow c_{11}=\frac{-38}{6}$
$10+9+6c_{12}=0 \rightarrow 19+6c_{12}=0 \rightarrow c_{12}=\frac{-19}{6}$
$30+6+6c_{21}=0 \rightarrow 36+6c_{21}=0 \rightarrow c_{21}=\frac{-36}{6}$
$20+(-12)+6c_{22}=0 \rightarrow 8+6c_{22}=0 \rightarrow c_{22}=\frac{-8}{6}$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{38}{6} & -\frac{19}{6} \\ -\frac{36}{6} & -\frac{8}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} & -\frac{19}{6} \\ -6 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Fecha de Realización: 23-Agosto-2019

Ejercicios en Clase 4: Producto Punto

Ejercicios resueltos en colaboración con:
- Almeida Ortega Andrea Melissa
- Pardo Tinoco Jonathan David

1.- Calcular $X \cdot Y$ para

a) $x = [a \quad b]$ $\qquad y = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$X \cdot Y = ac + bd$

b) $X = [\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad 2]$ $\qquad Y = [\sqrt{18} \quad \sqrt{32} \quad 1]$

$X \cdot Y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} + (-\sqrt{2})\sqrt{32} + 2 \cdot 1$
$X \cdot Y = \sqrt{36} - \sqrt{64} + 2$
$X \cdot Y = 6 - 8 + 2$
$X \cdot Y = 0$

2.- Para $a = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcular

a) $(2a) \cdot (3b)$

$\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \end{bmatrix}$
$8 \cdot 15 + (-2)(-21)$
$120 + 42$
162

b) $(a + b) \cdot c$

$\begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$-9 + (-8)(1)$
$-9 - 8$
-17

c) $(a \cdot c) + (b \cdot c)$

$[(4)(-1) + (-1)(1)] + [(5)(-1) + (-7)(1)]$
$[-4 - 1] + [-5 - 7]$
$-5 - 12$
-17

d) $(a-c)\cdot(3b-4a)$

$$\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}15\\-21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-16\\4\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\-17\end{bmatrix}$$

$$(5)(-1)+(-2)(-17)$$

$$-5+34$$

$$29$$

e) $\left(\frac{a\cdot c}{a\cdot a}\right)a$

$$\frac{(4)(-1)+(-1)(1)}{(4)(4)+(-1)(-1)}\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$$

$$\frac{-4-1}{16+1}\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$$

$$-\frac{5}{17}\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{20}{17}\\\frac{5}{17}\end{bmatrix}$$

f) Calcular el ángulo entre:

i) a y b

Sea θ el ángulo entre a y b

$$\frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}=\cos\theta \rightarrow \frac{A\cdot B}{\sqrt{A\cdot A}\,\sqrt{B\cdot B}}=\cos\theta \rightarrow \frac{27}{\sqrt{17}\,\sqrt{74}}=\cos\theta$$

$$\frac{27}{\sqrt{1258}}=\cos\theta \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{1258}}\right)=\theta \rightarrow \theta=0.705 \text{ rad ó } 40.42^\circ$$

ii) a y c

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{17}\,\sqrt{2}}\right)\rightarrow \theta=2.601 \text{ rad ó } 149.03^\circ$$

iii) b y c

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-12}{\sqrt{74}\,\sqrt{2}}\right)\rightarrow \theta=2.976 \text{ rad ó } 170.53^\circ$$

Fecha de Realización: 26-Agosto-2019

Ejercicios en Clase 5: Producto Matricial

Para las matrices dadas, calcular los productos dados

1- $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) A × B

$$A \times B = \begin{bmatrix} (3)(-5)+(-2)(1) & (3)(6)+(-2)(3) \\ (1)(-5)+(4)(1) & (1)(6)+(4)(3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -15-2 & 18-6 \\ -5+4 & 6+12 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -17 & 12 \\ -1 & 18 \end{bmatrix}$$

b) B × A

$$B \times A = \begin{bmatrix} (-5)(3)+(6)(1) & (-5)(-2)+(6)(4) \\ (1)(3)+(3)(1) & (1)(-2)+(3)(4) \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -15+6 & 10+24 \\ 3+3 & -2+12 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -9 & 34 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

c) $A^2 B^3$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (3)(3)+(-2)(1) & (3)(-2)+(-2)(4) \\ (1)(3)+(4)(1) & (1)(-2)+(4)(4) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9-2 & -6-8 \\ 3+4 & -2+16 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} (-5)(-5)+(6)(1) & (-5)(6)+(6)(3) \\ (1)(-5)+(3)(1) & (1)(6)+(3)(3) \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 25+6 & -30+18 \\ -5+3 & 6+9 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 31 & -12 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B^2 \times B = \begin{bmatrix} (31)(-5)+(-12)(1) & (31)(6)+(-12)(3) \\ (-2)(-5)+(15)(1) & (-2)(6)+(15)(3) \end{bmatrix}$$

$$B^2 \times B = \begin{bmatrix} -155-12 & 186-36 \\ 10+15 & -12+45 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} -167 & 150 \\ 25 & 33 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \times B^3 = \begin{bmatrix} (7)(-167)+(-14)(25) & (7)(150)+(-14)(33) \\ (7)(-167)+(14)(25) & (7)(150)+(14)(33) \end{bmatrix}$$

$$A^2 \times B^3 = \begin{bmatrix} -1169 - 350 & 1050 - 462 \\ -1169 + 350 & 1050 + 462 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \times B^3 = \begin{bmatrix} -1519 & 588 \\ -819 & 1512 \end{bmatrix}$$

2.- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

a) $A \times B$

$$A \times B = \begin{bmatrix} (0)(1)+(1)(3) & (0)(4)+(1)(0) & (0)(-2)+(1)(4) \\ (2)(1)+(3)(3) & (2)(4)+(3)(0) & (2)(-2)+(3)(4) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0+3 & 0+0 & 0+4 \\ 2+9 & 8+0 & -4+12 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 11 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

b) $B \times A$

El producto no se puede realizar porque el número de columnas de B no coincide con el número de filas de A

Fecha de Entrega: 27-Agosto-2019

Tarea 5: Producto Vectorial

1.- Determinar $u \cdot v$, $u \cdot u$, $\|u\|^2$, $(u \cdot v)v$, $u \cdot (5v)$ para:

a) $u = [3, 4]$, $v = [7, 1]$

$u \cdot v = [(3)(7) + (4)(1)] = [21 + 4]$

$u \cdot v = 25$

$u \cdot u = [(3)(3) + (4)(4)] = [9 + 16]$

$u \cdot u = 25$

$\|u\|^2 = u \cdot u \quad \therefore \quad \|u\|^2 = 25$

$(u \cdot v)v = 25[7, 1] = [25(7), 25(1)]$

$(u \cdot v)v = [175, 25]$

$u \cdot (5v) = [(3)(35) + (4)(5)] = [105 + 20]$

$u \cdot (5v) = 125$

b) $u = [1, 1, 2]$, $v = [-1, 3, 0]$

$u \cdot v = [(1)(-1) + (1)(3) + (2)(0)] = [-1 + 3 + 0]$

$u \cdot v = 2$

$u \cdot u = [(1)(1) + (1)(1) + (2)(2)] = [1 + 1 + 4]$

$u \cdot u = 6$

$\|u\|^2 = u \cdot u \quad \therefore \quad \|u\|^2 = 6$

$(u \cdot v)v = 2[-1, 3, 0] = [-2, 6, 0]$

$u \cdot (5v) = [(1)(-5) + (1)(15) + (2)(0)] = [-5 + 15 + 0]$

$u \cdot (5v) = 10$

c) $u = [4, 0, 3, -5]$, $v = [0, 2, 5, 4]$

$u \cdot v = [(4)(0) + (0)(2) + (3)(5) + (-5)(4)] = [0 + 0 + 15 - 20]$

$u \cdot v = -5$

$u \cdot u = [(4)(4) + (0)(0) + (3)(3) + (-5)(-5)] = [16 + 0 + 9 + 25]$

$u \cdot u = 50$

$\|u\|^2 = u \cdot u \quad \therefore \quad \|u\|^2 = 50$

$(u \cdot v)v = -5[0, 2, 5, 4] = [0, -10, -25, -20]$

$u \cdot (5v) = [(4)(0) + (0)(10) + (3)(25) + (-5)(20)] = [0 + 0 + 75 - 100]$

$u \cdot (5v) = -25$

d) $u = [0, 4, 3, 4, 4]$, $v = [6, 8, -3, 3, 5]$

$u \cdot v = [(0)(6) + (4)(8) + (3)(-3) + (4)(3) + (4)(5)] = [0 + 32 - 9 + 12 + 20]$

$u \cdot v = 55$

$u \cdot u = [(0)(0) + (4)(4) + (3)(3) + (4)(4) + (4)(4)] = [0 + 16 + 9 + 16 + 16]$

$u \cdot u = 57$

$\|u\|^2 = u \cdot u \quad \therefore \quad \|u\|^2 = 57$

$(u \cdot v)v = 55[6, 8, -3, 3, 5] = [330, 440, -165, 165, 275]$

$u \cdot (5v) = [(0)(30) + (4)(40) + (3)(-15) + (4)(15) + (4)(25)] = [0 + 160 - 45 + 60 + 100]$

$u \cdot (5v) = 275$

2.- Determinar $(3u-v)\cdot(u-3v)$ si se sabe que $u\cdot u=8$, $u\cdot v=7$, $v\cdot v=6$

$$(3u-v)\cdot(u-3v)$$
$$3u\cdot(u-3v)-v(u-3v)$$
$$3u\cdot u+3u\cdot(-3v)+(-v)\cdot(u)+(-v)\cdot(-3v)$$
$$3(u\cdot u)-9(u\cdot v)-(u\cdot v)+3(v\cdot v)$$
$$3(8)-9(7)-(7)+3(6)$$
$$24-63-7+18$$
$$42-70$$
$$-28$$

3.- Determinar el ángulo entre los vectores dados

a) $u=[3\ 1]$ $v=[-2,\ 4]$

$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{(3)(-2)+(1)(4)}{\sqrt{10}\ \sqrt{20}}\right]$$
$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{-6+4}{\sqrt{200}}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{-2}{10\sqrt{2}}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{-1}{5\sqrt{2}}\right]$$
$\theta=1.713$ rad ó $98.130°$

b) $u=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right),\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$, $v=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$u=\left[\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $v=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}}{\sqrt{\frac{4}{4}}\ \sqrt{\frac{4}{4}}}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$$
$\theta=\frac{\pi}{12}$ ó $15°$

c) $u=[1,\ 1,\ 1]$, $v=[2,\ 1,\ -1]$

$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}\ \sqrt{6}}\right]$$
$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{2}{3\sqrt{2}}\right]=1.0799$$
$\theta=1.0799$ rad ó $61.87°$

d) $u=[1,\ -1,\ 0,\ 1]$, $v=[-1,\ 2,\ -1,\ 0]$

$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{-3}{\sqrt{3}\ \sqrt{6}}\right]$$
$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{-3}{3\sqrt{2}}\right]$$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ ó 135°

e) $u = [1, 3, -1, 2, 0]$, $v = [-1, 4, 5, -3, 2]$

$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{0}{\sqrt{15}\sqrt{55}}\right]$

$\theta = \frac{1}{2}$ ó 90°

Fecha de Entrega: 27-Agosto-2019

Tarea 6: Producto Matricial

1.- Dadas las matrices A, B y el número α, calcular AB, αA, αB, $\alpha(AB)$, $(\alpha A)B$, $A(\alpha B)$

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\alpha = 2$

$$AB = \begin{bmatrix} 6+6+3 & 10+3+3 \\ 6+4+12 & 10+2+12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 22 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\alpha B = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha A)B = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 22 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A(\alpha B) = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 22 & 24 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, $\alpha = -4$

$$AB = \begin{bmatrix} 0-8 & 0-5 \\ 2+24 & 4+15 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 26 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\alpha B = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ -32 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(AB) = \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -104 & -76 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha A)B = \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -104 & -76 \end{bmatrix}$$

$$A(\alpha B) = \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -104 & -76 \end{bmatrix}$$

c) $A = [1 \quad 3 \quad 4]$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha = 6$

$AB = [2 + 3 + 8]$

$AB = [13]$

$\alpha A = [6 \quad 18 \quad 24]$

$\alpha B = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\alpha(AB) = [78]$

$(\alpha A)B = [78]$

$A(\alpha B) = [78]$

2.- Si $A = \begin{bmatrix} \cos(x) & \mathrm{sen}(x) \\ -\mathrm{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \cos(y) & \mathrm{sen}(y) \\ -\mathrm{sen}(y) & \cos(y) \end{bmatrix}$

prueba que $AB = BA$ y que $A^2 = \begin{bmatrix} \cos(2x) & \mathrm{sen}(2x) \\ -\mathrm{sen}(2x) & \cos(2x) \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(x)\cos(y) - \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) & \cos(x)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}(x)\cos(y) \\ -\mathrm{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\,\mathrm{sen}(y) & -\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) + \cos(x)\cos(y) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \cos(y)\cos(x) - \mathrm{sen}(y)\,\mathrm{sen}(x) & \cos(y)\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(y)\cos(x) \\ -\mathrm{sen}(y)\cos(x) - \cos(y)\,\mathrm{sen}(x) & -\mathrm{sen}(y)\,\mathrm{sen}(x) + \cos(y)\cos(x) \end{bmatrix}$$

$AB = BA$:

3.- Probar que:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ entonces $A^2 = A$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \therefore A^2 = A$$

b) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -6 \end{bmatrix}$ entonces $A^3 = 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 3 & 3 & -9 \\ 5 & 2 & 24 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^3 = \begin{bmatrix} 18 & 9 & 54 \\ 36 & 18 & 81 \\ -33 & -15 & -117 \end{bmatrix}$$

Por lo que la prueba se contradice y $A^3 \neq 0$

Fecha de Realización: 27 - Agosto - 2019

Ejercicios en Clase 6: Producto Matiicial y Matiiz Inversa

1.- Multiplicar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1+0+0 & -1+1+0 & 0-1+1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0-1+1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.- Calcular B^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $BB^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3b_{11} + 2b_{21} & -3b_{12} + 2b_{22} \\ 0b_{11} - b_{21} & 0b_{12} - b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se plantea:

$$-3b_{11} + 2b_{21} = 1$$
$$-b_{21} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$$

$$\Delta_{b_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$\Delta_{b_{21}} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$b_{11} = -\frac{1}{3}, \quad b_{21} = \frac{0}{3} = 0$$

$$-3b_{12} + 2b_{22} = 0$$
$$-b_{22} = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$$

$$\Delta_{b_{12}} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$\Delta_{b_{22}} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3$$

$$b_{12} = -\frac{2}{3} \qquad b_{22} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fecha de Realización: 02-Septiembre-2019

Ejercicios en Clase 7: Eliminación Gaussiana

1.- Resolver los sistemas de ecuaciones lineales

a)
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 3x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 - 4R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{5}{3}R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ -3y - 6z &= -12 \\ -z &= -3 \end{aligned} \quad \to z = 3$$

$$-3y = 6 \to y = -2$$

$$x = 9 - 9 + 4 \to x = 4$$

La solución del sistema es:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 2x + 7y + 12z &= 30 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 - 4R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Existen soluciones infinitas

c)
$$\begin{aligned} y - 3z &= 4 \\ 2x - 6y + 7z &= 15 \\ x - 2y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right]$$

Asi:

$$x - 2y + 5z = 10$$

$$y - 3z = 4$$

$$-9z = 3$$

$$z = -\frac{1}{3}$$

$$y = 3$$

$$x - 8 - \frac{5}{3} = 10$$

$$x = \frac{53}{3}$$

Fecha de Realización: 03 - Septiembre - 2019

Ejercicios en Clase 8: Método Gauss - Jordan

1.- Resolver los sistemas de ecuaciones lineales

a) $x + 2y = 8$
$3x - 4y = 4$

La matriz aumentado es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -10 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{10}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array} \longrightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

b) $x + y = 1$
$2x - y = 5$
$3x + 4y = 2$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 2R_1 \to R_2]{R_3 - 3R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 3R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array} \longrightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) $x + 4y - z = 12$
$3x + 8y - 2z = 4$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 3 & 8 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -4 & 1 & 32 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{array}{r} x + 4y - z = 12 \\ -4y + z = 32 \end{array}$$

El sistema tiene un número infinito de soluciones

Fecha de Realización: 04-Septiembre - 2019

Ejercicios en Clase 9: Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

1.- Resolver

a) Una cadena de supermercados vende carne molida de tipo popular y selecta. Un lote de molida popular contiene 3 kg de grasa y 17 kg de carne roja y uno de molida selecta contiene 2 kg de grasa y 18 de carne roja.
Si en un momento dado la cadena cuenta con 10 kg de grasa y 90 kg de carne ¿cuánto se puede producir sin que sobre carne?

$$\begin{matrix} 17c + 3g = p \\ 18c + 2g = s \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 17p + 18s = 90 \\ 3p + 2s = 10 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 17 & 18 & 90 \\ 3 & 2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{6R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 17 & 18 & 90 \\ 18 & 12 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 17 & 18 & 90 \\ 1 & -6 & -30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -30 \\ 17 & 18 & 90 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 17R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -30 \\ 0 & 120 & 600 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{120} R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -30 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Asi:

$$x - 6y = -30$$
$$y = 5$$
$$x - 30 = -30 \longrightarrow x = 0$$

Se necesitan 0 de popular y 5 de selecta

b) $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18}$

$$x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = x^2(x+2) + 9(x+2) = (x^2+9)(x+2)$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2 + 2Ax + Bx + 2B + Cx^2 + 9C}{(x^2+9)(x+2)} = \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B+9C}{(x^2+9)(x+2)}$$

Así:

$$A + C = 0$$
$$2A + B = 0$$
$$2B + 9C = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 1 \end{array}\right]$$

$$x + z = 0$$
$$y - 2z = 0$$
$$13z = 1 \longrightarrow z = \frac{1}{13}$$
$$y = \frac{2}{13}$$
$$x = -\frac{1}{13}$$

$$\frac{-\frac{1}{13}x + \frac{2}{13}}{x^2+9} + \frac{\frac{1}{13}}{x+2}$$

$$\int\left(\frac{-x+2}{13(x^2+9)}+\frac{1}{13(x+2)}\right)dx$$

$$\frac{2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)}{39}-\frac{\ln(x^2+9)}{26}+\frac{\ln|x+2|}{13}+c$$

c) Determinar la ecuación de la parábola que pasa por (-1, -4), (2, -4), (5, 20)

Sabemos que $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\therefore\ -4=f(-1)=a(-1)^2+b(-1)+c$$

$$a-b+c=-4$$

$$-4=f(2)=a(2)^2+b(2)+c$$

$$4a+2b+c=-4$$

$$20=f(-5)=a(5)^2+b(5)+c$$

$$25a+5b+c=20$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-4\\4&2&1&-4\\25&5&1&20\end{array}\right]\xrightarrow[R_2-4R_1\to R_2]{R_3-25R_1\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-4\\0&6&-3&12\\0&30&-24&120\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-5R_2\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-4\\0&6&-3&12\\0&0&-9&60\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1+\frac{1}{18}R_3\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\0&6&-3&12\\0&0&-9&60\end{array}\right]\xrightarrow{R_1+\frac{1}{6}R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&6&-3&12\\0&0&-9&60\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-\frac{1}{3}R_3\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&6&0&-8\\0&0&-9&60\end{array}\right]\xrightarrow[-\frac{1}{9}R_3\to R_3]{\frac{1}{6}R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{4}{3}\\0&0&1&-\frac{20}{3}\end{array}\right]$$

$$a=\frac{4}{3},\quad b=-\frac{4}{3},\quad c=-\frac{20}{3}\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{4x^2}{3}-\frac{4x}{3}-\frac{20}{3}$$

d) Patito Computers fabrica 3 modelos de computadoras personales: genérica, clon y lentium. Una PC genérico necesita 12 hrs de ensamble, 2.5 de pruebas y 2 de instalación. Una clon, 10 de ensamble, 2 de pruebas y 2 de instalación. Una lentium, 6 de ensamble, 1.5 de pruebas y 1.5 de instalación. La fábrica dispone de 556 hrs/mes para ensamble, 120 para pruebas y 103 para instalar. ¿Cuántas producen en un mes?

$$12g+10c+6L=556$$

$$2.5g+2c+1.5L=120$$

$$2g+2c+1.5L=103$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}12&10&6&556\\2.5&2&1.5&120\\2&2&1.5&103\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-6R_3\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}0&-2&-3&-62\\2.5&2&1.5&120\\2&2&1.5&103\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-\frac{5}{4}R_3\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}0&-2&-3&-27\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{8}&-8.75\\2&2&\frac{3}{2}&103\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-4R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&-\frac{3}{2}&-27\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{8}&-8.75\\2&2&\frac{3}{2}&103\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&\frac{3}{2}&103\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{8}&-8.75\\0&0&-\frac{3}{2}&-27\end{array}\right]\rightarrow\begin{array}{l}2x+2y+\frac{3}{2}z=103\\-\frac{y}{2}-\frac{3}{8}z=-8.75\\-\frac{3}{2}z=-27\end{array}$$

56 computadoras: 34 genéricas, 4 clones y 18 lentiums

Fecha de Entrega: 09-Septiembre-2019

Tarea 7: Sistemas de Ecuaciones no Homogéneos (Primera Parte)

1:- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss:

a)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=-4\\ 4x+5y+6z&=-4\\ 7x-15y-9z&=4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4\\ 4 & 5 & 6 & -4\\ 7 & -15 & -9 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-4R_1\to R_2]{R_3-7R_1\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4\\ 0 & -3 & -6 & 12\\ 0 & -29 & -30 & 32 \end{array}\right] R_3-\frac{29}{3}R_2\to R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4\\ 0 & -3 & -6 & 12\\ 0 & 0 & 28 & -84 \end{array}\right]$$

Así

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=-4\\ -3y-6z&=12\\ 28z&=-84 \longrightarrow z=-3\\ -3y&=-6 \longrightarrow y=2\\ x-5&=-4 \longrightarrow x=1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+2y-z&=-3\\ 3x-y-2z&=13\\ x-5y\quad&=19 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3\\ 3 & -1 & -2 & 13\\ 1 & -5 & 0 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-3R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & -7 & 1 & 22\\ 0 & -7 & 1 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & -7 & 1 & 22\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]!$$

Así

$$\begin{aligned} x+2y-z&=-3\\ -7y+z&=22\\ 0&=0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} y&=\frac{22}{7}+\frac{z}{7}\\ x&=\frac{23}{7}+\frac{5z}{7} \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones

c)
$$\begin{aligned} x+y-z&=5\\ 2x\quad+z&=4\\ x-y+2z&=0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5\\ 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5\\ 0 & -2 & 3 & -6\\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5\\ 0 & -2 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Así

$$\begin{aligned} x+y-z&=5\\ -2y+3z&=-6\\ 0&=1 \; ! \end{aligned}$$

El sistema no tiene solución

2.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método Gauss - Jordan

a) $x + y + z = 2$
$x - y + 3z = 12$
$2x + 5y + 2z = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{4}{3} R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2} R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - \frac{2}{3} R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2} R_3 \to R_3]{\frac{1}{3} R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Así

$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3$

b) $-2x + 2y - 2z = -8$
$x - y + z = 4$
$2x - 2y + 2z = 8$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2} R_3 \to R_3]{-\frac{1}{2} R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[m,n = \{1,2,3\}]{R_m - R_n \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x - y + z &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

El sistema tiene número infinito de soluciones

c) $2x + 3y - z = 8$
$2x + 3y + z = 5$
$-4x - 6y + 2z = 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2} R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 8 \\ 2x + 3y + z &= 5 \\ 0 &= -\frac{19}{2} \qquad \overset{\nabla}{\circ} \end{aligned}$$

El sistema no tiene solución

Fecha de Entrega: 09-Septiembre-2019

Tarea 7: Aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones no Homogéneos (Segunda Parte)

1.- Daniel tiene $575 en billetes de uno, cinco y diez dólares. En total posee 95 billetes. El número de billetes de un dólar más el número de billetes de cinco dólares corresponde a 5 unidades más que el doble del número de los billetes de diez dólares ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene Daniel?

u = uno, c = cinco, d = diez

$575 = \alpha u + \beta c + \gamma d \longrightarrow 575 = u + 5c + 10d$

$95 = u + c + d$

$u + c = 5 + 2d \longrightarrow 5 = u + c - 2d$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 10 & 575 \\ 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_2 \to R_3]{R_1 - R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 9 & 480 \\ 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 0 & -3 & -90 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 4 & 9 & 480 \\ 0 & 0 & -3 & -90 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{5}{3} R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 4 & 4 & 330 \\ 0 & 0 & -3 & -90 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{1}{4} R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{2} \\ 0 & 4 & 4 & 330 \\ 0 & 0 & -3 & -90 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{4}{3} R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 210 \\ 0 & 0 & -3 & -90 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{3} R_3 \to R_3]{\frac{1}{4} R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right]$$

$u = \frac{25}{2}, \quad c = \frac{105}{2}, \quad d = 30$

Raramente, pero apegándonos estrictamente a las condiciones, Daniel tiene 12.5 billetes de uno, 52.5 billetes de cinco y 30 billetes de diez

2.- La suma de tres números da 33. El mayor tiene una unidad menos que el doble del menor. El triple del número menor corresponde a una unidad menos que la suma de los otros dos números. Determinar los tres números

$a + b + c = 33$ $\qquad a > b > c$

$a + 1 = 2c \longrightarrow a - 2c = -1$

$3c = a + b - 1 \qquad a + b - 3c = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & -1 & -3 & -34 \\ 0 & 0 & -4 & -32 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{2} R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & -1 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & -32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4} R_3 \to R_3]{R_1 + R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & -1 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$x = 15 \qquad y = 10 \qquad z = 8$

3.- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. El ángulo mayor es igual a la suma de los otros dos. El doble del ángulo menor tiene 10° menos que el ángulo mayor. Calcular la medida de cada ángulo

$\alpha + \beta + \gamma = 180$ $\qquad \alpha > \beta > \gamma$

$\alpha = \beta + \gamma \longrightarrow \alpha - \beta - \gamma = 0$

$2\gamma + 10 = \alpha \longrightarrow \alpha - 2\gamma = 10$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & -2 & -2 & -180 \\ 0 & -1 & -3 & -170 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & 4 & 160 \\ 0 & -1 & -3 & -170 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & -1 & -3 & -170 \\ 0 & 0 & 4 & 160 \end{array}\right]$$

Así

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 180 \\ -\beta - 3\gamma = -170 \\ 4\gamma = 160 \Rightarrow \gamma = 40 \\ -\beta = -50 \Rightarrow \beta = 50 \\ \alpha = 180 - 90 \Rightarrow \alpha = 90 \end{array}\right\} S = \left\{ \begin{bmatrix} 90 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix} \right\}$$

4.- Determinar la descomposición en fracciones parciales de

a) $\dfrac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x+3)(x-1)$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax^2 + 2Ax - 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 3Cx}{x(x^2+2x-3)}$$

$$\frac{(A+B+C)x^2 + (2A - B + 3C)x + (-3A)}{x(x^2+2x-3)}$$

$$A + B + C = 4$$
$$2A - B + 3C = 13$$
$$-3A = -9$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right]$$

Así

$$A + B + C = 4$$
$$-A - 4B = 1$$
$$-3A = -9 \Rightarrow A = 3$$
$$-4B = 4 \Rightarrow B = -1$$
$$2 + C = 4 \quad \therefore \quad C = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

b) $\dfrac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2}$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{Ax^2 - 6Ax - 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx}{x(x-3)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-6A - 3B + C)x - 3A}{x(x-3)^2}$$

$$A + B = 1$$
$$-6A - 3B + C = 10$$
$$-3A = -36$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 1 & 10 \\ -3 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right]$$

Asi

$-6A - 3B + C = 10$

$A + B = 1$

$-3A = -36 \longrightarrow A = 12$

$B = -11$

$C = 49$

$$\left.\begin{array}{l} A = 12 \\ B = -11 \\ C = 49 \end{array}\right\} \frac{12}{x} - \frac{11}{x-3} + \frac{49}{(x-3)^2}$$

c) $\dfrac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2+1)^2}$

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$A = 5$

$B = -3$

$A + C = 7 \longrightarrow C = 2$

$B + D = -3 \longrightarrow D = 0$

$$\frac{5x-3}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

5: Determinar un polinomio de grado 2 que pase por los puntos:

a) (0, 7.6), (7, 7.5), (15, 9.1)

$y = ax^2 + bx + c$

$7.6 = c$

$7.5 = 49a + 7b + c$

$9.1 = 225a + 15b + c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 7.6 \\ 49 & 7 & 1 & 7.5 \\ 225 & 15 & 1 & 9.1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - \frac{15}{7} R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 7.6 \\ 49 & 7 & 1 & 7.5 \\ 120 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{244}{35} \end{array}\right]$$

$49a + 7b + c = 7.5$

$120a \quad -\frac{8}{7}c = -\frac{244}{35}$

$c = 7.6$

$a = \frac{1}{70}$

$b = -\frac{4}{35}$

$$f(x) = \frac{x^2}{70} - \frac{4x}{35} + 7.5$$

b) (1, 122), (6, 359), (12, 131)

$y = ax^2 + bx + c$

$122 = a + b + c$

$359 = 36a + 6b + c$

$131 = 144a + 12b + c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 122 \\ 36 & 6 & 1 & 359 \\ 144 & 12 & 1 & 131 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 122 \\ 35 & 5 & 0 & 237 \\ 143 & 11 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{11}{5}R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 122 \\ 35 & 5 & 0 & 237 \\ 66 & 0 & 0 & -512.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 122 \\ 35a + 5b &= 237 \\ 66a &= -512.4 \implies a = -\frac{427}{55} \end{aligned}$$

$$5b = \frac{5596}{11} \implies b = \frac{5596}{55}$$

$$c = \frac{1541}{55}$$

$$f(x) = -\frac{427x^2}{55} + \frac{5596x}{55} + \frac{1541}{55}$$

6.- Determinar un polinomio de grado 3 que pase por $(2, 6.5), (6, 13), (10, 19), (14, 26.9)$

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ 6.5 &= 8a + 4b + 2c + d \\ 13 &= 216a + 36b + 6c + d \\ 19 &= 1000a + 100b + 10c + d \\ 26.9 &= 2744a + 196b + 14c + d \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 6.5 \\ 216 & 36 & 6 & 1 & 13 \\ 1000 & 100 & 10 & 1 & 19 \\ 2744 & 196 & 14 & 1 & 26.9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 27R_1 \to R_2]{\substack{R_4 - 343R_1 \to R_4 \\ R_3 - 125R_1 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 6.5 \\ 0 & -72 & -48 & -26 & -162.5 \\ 0 & -400 & -240 & -124 & -793.5 \\ 0 & -1176 & -672 & -342 & -2202.6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - \frac{50}{9}R_2 \to R_3]{R_4 - \frac{49}{3}R_2 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 6.5 \\ 0 & -72 & -48 & -26 & -162.5 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} & \frac{184}{9} & -\frac{1967}{18} \\ 0 & 0 & 112 & \frac{248}{3} & \frac{13547}{30} \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 - \frac{21}{5}R_3 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 6.5 \\ 0 & -72 & -48 & -26 & -162.5 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} & \frac{184}{9} & \frac{1967}{18} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -7.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 8a + 4b + 2c + d &= 6.5 \\ -72b - 48c - 26d &= -162.5 \\ \frac{80}{3}c + \frac{184}{9}d &= \frac{1967}{18} \\ -\frac{16}{5}d &= -7.4 \implies d = \frac{37}{16} \\ \frac{80}{3}c &= 62 \implies c = \frac{93}{40} \\ -72b &= 9.225 \implies b = -\frac{41}{320} \\ 8a &= 0.05 \implies a = \frac{1}{160} \end{aligned}$$

Así:

$$f(x) = \frac{x^3}{160} - \frac{41x^2}{320} + \frac{93x}{40} + \frac{37}{16}$$

Fecha de Realización: 11-Septiembre-2019

Ejercicios en Clase 10: Matriz Inversa

1- Calcular (si se puede) de las matrices dadas, su inversa

a)

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\9&2&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\9&2&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&3&0&1&0\\9&2&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-9R_1\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&3&0&1&0\\0&2&1&-\frac{9}{2}&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&3&0&1&0\\0&0&-5&-\frac{9}{2}&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&3&0&1&0\\0&0&1&\frac{9}{10}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-3R_3\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{27}{10}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\0&0&1&\frac{9}{10}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{27}{10}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{9}{10}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

b)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\5&5&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&3&0&1&0\\5&5&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-5R_1\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&3&0&1&0\\0&0&-4&-5&0&1\end{array}\right]$$

3.75

$$\xrightarrow{R_1-\frac{1}{8}R_3\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1.5&\frac{13}{8}&0&-\frac{1}{8}\\0&2&3&0&1&0\\0&0&-4&-5&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-\frac{1}{2}R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{13}{8}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&2&3&0&1&0\\0&0&-4&-5&0&1\end{array}\right]$$

$\frac{3}{4}$

$\frac{15}{4}$

$$\xrightarrow{R_2+\frac{3}{4}R_3\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{13}{8}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&2&0&-\frac{15}{4}&1&\frac{3}{4}\\0&0&-4&-5&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[-\frac{1}{4}R_3\to R_3]{\frac{1}{2}R_2\to R_2}\begin{bmatrix}\frac{13}{8}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\\frac{15}{8}&\frac{1}{2}&\frac{3}{8}\\\frac{5}{4}&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{13}{8}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\\frac{15}{8}&\frac{1}{2}&\frac{3}{8}\\\frac{5}{4}&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$1.625=\frac{13}{8}$

$\frac{5}{6}$

Fecha de Realización: 17-Septiembre-2019

Ejercicios en Clase 11: Método de Cofactores

1- Calcular

a)
$x + y - z = 0$
$2x + y - z = 0$
$3x + 2y + 2z = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= [2-(-2)] - [4-(-3)] - [4-3]$
$= 4 - 7 - 1$
$= -4$

Como $\det(A) \neq 0$ el sistema tiene solución única
$S = \{(0, 0 0)\}$

b)
$x - y + z = 0$
$10x - 15y + 5z = 0$
$x - 4y + 2z = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\begin{vmatrix} -15 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$= (1)[-30-(-20)] + 1[20-5] - 1[-40-(-15)]$
$= -10 + 15 + 25$
$= 30$

Ahora habrá que obtener el número infinito de soluciones y su regla que relaciona las variables

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & -15 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 10R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Fecha de Realización: 19 - Septiembre - 2019

Ejercicios en Clase 12: Propiedades de Determinantes

1.-

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2-R_1\\R_3-3R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{R_3-R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

b) $$\underset{-10 \quad +10 \quad +10}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}} \underset{\substack{R_2-10R_1\\R_3-R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{R_3-R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$

2.- Para la matiiz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar si admite inversa

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_4+3C_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_4 \leftrightarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-13)(-1) = --13$$

$\therefore$ Si admite inversa

3. Para

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcular su determinante

$$0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$0 + (-2) + 1$$

$$-1$$

Fecha de Realización: 20-Septiembre-2019

Ejercicios en Clase 13: Matriz Inversa por Determinantes

1.- Sean $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$

a) Calcular la matriz de cofactores de A

$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(c_{ij})$

$c_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$ $\quad c_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0$ $\quad c_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$

$c_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$ $\quad c_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$ $\quad c_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$

$c_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$ $\quad c_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$ $\quad c_{32}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$

$$Cof(A)=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

b) Calcular la matriz adjunta de A

$$[Cof(A)]^T=Adj(A)=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

c) Comprobar que $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}Adj(A)$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad y \quad AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

d) Realizar los incisos a, b, c para la matriz B

$c_{11}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=7$ $\quad c_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-5$ $\quad c_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3$

$c_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3$ $\quad c_{22}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2$ $\quad c_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=2$

$c_{31}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3$ $\quad c_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2$ $\quad c_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$

$$Cof(B)=\begin{bmatrix}7 & -5 & -3\\ -3 & 2 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad Adj(A)=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -5 & 2 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Como $\det(B)=-1$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 3\\ 5 & -2 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$

Fecha de Entrega: 23-Septiembre-2019

Tarea 8: Sistemas de Ecuaciones Homogéneos (Tercera Parte)

1.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos

a) $3x - 4y = 0$

$2x + y = 0$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \frac{2}{3}R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Así

$$3x - 4y = 0$$

$$\frac{11}{3}y = 0 \longrightarrow y = 0$$

$$\therefore 3x - 0 = 0$$

$$3x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$\therefore S = \{[0,0]\}$$

b) $ix + 2y = 0$

$2x - 2iy = 0$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & 2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 0 \\ i & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - iR_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$x - iy = 0$$

$$y = 0 \longrightarrow y = 0$$

$$\therefore x - 0 = 0 \longrightarrow x = 0 \qquad y \qquad S = \{[0,0]\}$$

c) $x - y = 0$

$-3x + 3y = 0$

$x + y = 0$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 3R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad x = 0 \quad y = 0$$

$$S = \{[0,0]\}$$

d) $2x-3y+4z=0$
$x+2y-z=0$
$4x+y+2z=0$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-4R_1 \to R_3]{R_2-2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$x+2y-z=0$$
$$-7y+6z=0 \Rightarrow -7y=-6z \quad \therefore \quad y=\frac{6}{7}z$$
$$x+\frac{12z}{7}-z=0 \Rightarrow x+\frac{5z}{7}=0 \quad \therefore \quad x=-\frac{5}{7}z$$
$$S=\left\{\left[-\frac{5z}{7}, \frac{6z}{7}, z\right] \middle| \, z \in R\right\}$$

e) $x-y+z=0$
$3x+y+z=0$
$-x-2y-z=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+R_1 \to R_3]{R_2-3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así

$$x-y+z=0$$
$$4y-2z=0$$
$$-3y=0 \quad \therefore \quad y=0$$
$$\rightarrow 0-2z=0 \quad \therefore \quad z=0$$
$$x-0+0=0 \Rightarrow x=0$$
$$S=\{[0,0,0]\}$$

f) $x-2y-z+w=0$
$3x+y-5z-w=0$
$x-z+2w=0$
$x-y+7z=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3-R_1 \to R_3 \\ R_4-R_1 \to R_4}]{R_2-3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1 \to R_3]{R_2-7R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -58 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -58 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_4 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -58 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Asi

$$\begin{aligned} x - 2y - z + w &= 0 \\ y + z - w &= 0 \\ -58z + 3w &= 0 \\ 42z &= 0 & \therefore\ z &= 0 \\ 0 + 3w &= 0 & \therefore\ w &= 0 \\ y + 0 - 0 &= 0 & \therefore\ y &= 0 \\ x - 0 - 0 + 0 &= 0 & \therefore\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Fecha de Entrega: 23-Septiembre-2019

Tarea 9: Matriz Inversa

1- Para las siguientes matrices, calcular (si se puede) su matriz inversa:

a) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b_{11} + a b_{21} = 1$

$b_{12} + a b_{22} = 0$

$-a b_{11} + b_{21} = 0$

$-a b_{12} + b_{22} = 1$

$b_{11} + a b_{21} = 1$

$-a b_{11} + b_{21} = 0$

$b_{12} + a b_{22} = 0$

$-a b_{12} + b_{22} = 1$

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a^2} \qquad b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a}{1+a^2} \qquad b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-a}{1+a^2} \qquad b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a^2}$$

Así:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & -\frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -4 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] !$$

La matriz no es invertible

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$ab_{11} + 0b_{21} + 0b_{31} = 1$

$b_{11} + ab_{21} + 0b_{31} = 0$

$0b_{11} + b_{21} + ab_{31} = 0$

$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D = a^3$

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D_1 = a^2$

$D_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

$D_2 = -a$

$D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$D_3 = 1$

$ab_{12} + 0b_{22} + 0b_{32} = 0$

$b_{12} + ab_{22} + 0b_{31} = 1$

$0b_{12} + b_{22} + ab_{31} = 0$

$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D = a^3$

$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D_1 = 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

$D_2 = a^2$

$D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$D_3 = -a$

$ab_{13} + 0b_{23} + 0b_{33} = 0$

$b_{13} + ab_{23} + 0b_{33} = 0$

$0b_{13} + b_{23} + ab_{33} = 1$

$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D = a^3$

$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D_1 = 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$D_2 = 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$D_3 = a^2$

Asi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

e) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$ Det (A) = 0 $\therefore$ No es invertible

f) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 - 3R_1 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2\sqrt{2}R_3 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_2 \to R_2]{\frac{1}{\sqrt{2}}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 4R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - bR_2 \to R_4]{R_4 - aR_1 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & -a & -b & -c & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{d}R_4 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{d} & -\frac{b}{d} & -\frac{c}{d} & \frac{1}{d} \end{array}\right]$$

2.- Para $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ probar que $A^T = A^{-1}$

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Supongamos que $A^T = A^{-1}$, en ese caso, $AA^{-1} = I$ pero como $A^T = A^{-1}$, entonces $AA^T = I$

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) & -\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) & \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^T = A^{-1}$

Fecha de Entrega: 23-Septiembre-2019

Tarea 10: Determinantes

1- Calcular los determinantes utilizando:

i) Por el método de cofactores

ii) Utilizando propiedades de determinantes

a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

i) $0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$0 - 5(-5) + 11$

$25 + 11$

36

ii) $\underset{R_3 \leftrightarrow R_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_2 - 3R_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_3 + \frac{5}{11}R_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{36}{11} \end{vmatrix}$

36

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

i) $-2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$28 - 13 + 5$

20

ii) $\underset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & -13 \end{vmatrix} \underset{R_3 - R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

20

c) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

i) $2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2[(0+0+35)-(30+0+0)]$

$2[35-30] = 2(5)$

10

ii) $-\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & -5 \\ 6 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2 - 6R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 8R_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & -42 & -12 & 35 \\ 0 & -14 & -4 & 10 \\ 0 & -53 & -15 & 48 \end{vmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & -14 & -4 & 10 \\ 0 & -42 & -12 & 35 \\ 0 & -53 & -15 & 48 \end{vmatrix}$

$$-2\begin{vmatrix}1 & 7 & 2 & -5\\ 0 & 7 & 2 & -5\\ 0 & -42 & -12 & 35\\ 0 & -53 & -15 & 48\end{vmatrix} \underset{\substack{R_3+6R_2\\ R_4+\frac{53}{7}R_2}}{=} \begin{vmatrix}1 & 7 & 2 & -5\\ 0 & 7 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{71}{7}\end{vmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow R_4}{=} -\begin{vmatrix}1 & 7 & 2 & -5\\ 0 & 7 & 2 & -5\\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{71}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

$-2(-5) = 10$

d) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 2 & -6 & -7 & 5\\ 5 & 0 & 4 & 4\end{vmatrix}$

i) $-3\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -6 & 5\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix} = -6$

ii) $-\begin{vmatrix}1 & -2 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 2 & -6 & 5 & -7\\ 5 & 0 & 4 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ -6 & 2 & 5 & -7\\ 0 & 5 & 4 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 4 & 4\\ -6 & 2 & 5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$

$\underset{R_3-3R_1}{=} -\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 4 & 4\\ 0 & -1 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} \underset{R_2+5R_3}{=} -\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -106\\ 0 & -1 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \begin{vmatrix}-2 & 1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -1 & -106\\ 0 & 0 & -1 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$

$= (-2)(-1)(-1)(3)$

$= -6$

e) $\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 8 & 0\\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0\end{vmatrix}$

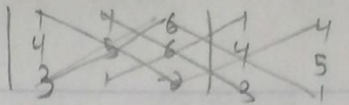
i) $1\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 8\\ 0 & 1 & -7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{vmatrix} = 1\left(4\begin{vmatrix}2 & 5 & -6\\ 0 & 1 & -7\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}\right) = 1(4)(-120) = -480$

ii) $\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 8 & 6\\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0\end{vmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow R_5}{=} -\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 8 & 0\\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0\\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\end{vmatrix} \underset{C_4 \leftrightarrow C_5}{=} \begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 0 & 8\\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6\\ 4 & -1 & 5 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$

$$\underset{C_1 \leftrightarrow C_4}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 5 & -6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{R_3 + R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4 - 5R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 29 & 2 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{R_4 + \frac{29}{2} R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 87 & \frac{217}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (1)(1)(-2)(87)(4)$$

$$= -696 \quad !$$



Fecha de Realización: 03-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 14: Regla do Cramer

1.- Resolver

$$x + 4y + 6z = 18$$
$$4x + 5y + 6z = 24$$
$$3x + y - 2z = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = [(-10)+(72)+(24)]-[(90)+(6)+(-32)]$$
$$86 - 64$$
$$22$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = [(-180)+(96)+(144)]-[(120)+(108)+(-192)]$$
$$60 - 36$$
$$24$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = [(-48)+(324)+(96)]-[(432)+(24)+(-144)]$$
$$372 - 312$$
$$60$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [(20)+(288)+(72)]-[(270)+(24)+(64)]$$
$$380 - 358$$
$$22$$

$$\frac{1}{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 24 \\ 60 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{22} \\ \frac{60}{22} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{30}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fecha de Realización: 04-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 15: Verificando Espacios Vectoriales

1.- Verificar que el siguiente es espacio vectorial

$P_2(R) = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$

$V = \{ax^2 + bx \mid a, b \in R\}$

Para A1:

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$

$a_1x^2 + b_1x$, $a_2x^2 + b_2x$ se encuentran en V, ahora, para A1

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1x + a_2x^2 + b_2x &= a_1x^2 + a_2x^2 + b_1x + b_2x \\ &= x^2(a_1 + a_2) + x(b_1 + b_2) \\ &= x^2(a_2 + a_1) + x(b_2 + b_1) \\ &= a_2x^2 + a_1x^2 + b_2x + b_1x \\ &= a_2x^2 + b_2x + a_1x^2 + b_1x \end{aligned}$$

$\therefore a_1x^2 + b_1x + a_2x^2 + b_2x = a_2x^2 + b_2x + a_1x^2 + b_1x$

Para A2:

Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R$

$a_1x^2 + b_1x$, $a_2x^2 + b_2x$, $a_3x^2 + b_3x$ se encuentran en V, ahora

$a_1x^2 + b_1x + (a_2x^2 + b_2x + a_3x^2 + b_3x)$

$(a_1x^2 + b_1x + a_2x^2 + b_2x) + a_3x^2 + b_3x)$

$\therefore a_1x^2 + b_1x + (a_2x^2 + b_2x + a_3x^2 + b_3x) = (a_1x^2 + b_1x + a_2x^2 + b_2x) + a_3x^2 + b_3x$

Para A3:

Sean $a_1, b_1 \in R$

$a_1x^2 + b_1x + 0x^2 + 0x = a_1x^2 + b_1x$

De modo que las literales tienen coeficiente 0

$\therefore a_1x^2 + b_1x = a_1x^2 + b_1x + 0x^2 + 0x$

Para A4:

Sea $u, v \in V \ni u + v = 0$

Nótese que $u + v = 0 \rightarrow a_1x^2 + b_1x + a_2x^2 + b_2x = 0$

Por suma término a término se tiene

$a_1x^2 + a_2x^2 = 0$, $b_1x + b_2x = 0$

Que al resolver para a_2, b_2, se tiene que:

$a_2 = -a_1$, $b_2 = -b_1$ y en consecuencia:

$-a_1x^2 - b_1x = -(a_1x^2 + b_1x) = -u$

$\therefore u - u = 0$

Para M1:

Sea $u, v \in V$ y $\alpha \in R$

$$\begin{aligned} \alpha(u + v) &= \alpha(a_1x^2 + b_1x + a_2x^2 + b_2x) \\ &= (\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha a_2x^2 + \alpha b_2x) \\ &= (\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x) + (\alpha a_2x^2 + \alpha b_2x) \end{aligned}$$

$= \alpha(a_1x^2 + b_1x) + \alpha(a_2x^2 + b_2x)$

$= \alpha u + \alpha v$

$\therefore \ \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

Para M2:

Sea $u \in V$ y $\alpha, \gamma \in R$

$(\alpha+\gamma)u = (\alpha+\gamma](ax^2+bx)$

$= [(\alpha+\gamma)ax^2 + (\alpha+\gamma)bx]$

$= \alpha ax^2 + \gamma ax^2 + \alpha bx + \gamma bx$

$= (\alpha ax^2 + \alpha bx) + (\gamma ax^2 + \gamma bx)$

$= \alpha(ax^2+bx) + \gamma(ax^2+bx)$

$= \alpha u + \gamma u$

$\therefore (\alpha+\gamma)u = \alpha u + \gamma u$

Para M3:

Sea $u \in V$ y $\alpha, \gamma \in R$

$(\alpha\gamma)u = (\alpha\gamma)(ax^2+bx)$

$= ((\alpha\gamma)ax^2 + (\alpha\gamma)bx)$

$= (\alpha(\gamma ax^2) + \alpha(\gamma bx))$

$= \alpha(\gamma ax^2 + \gamma bx)$

$= \alpha(\gamma(ax^2+bx))$

$= \alpha(\gamma u)$

$\therefore \ (\alpha\gamma)u = \alpha(\gamma u)$

Para M4:

Sea $u \in V$

$(1)u = (1)(ax^2+bx)$

$= ((1)ax^2 + (1)bx)$

$= (ax^2+bx)$

$= u$

$\therefore \ (1)u = u$

Los 8 axiomas se cumplen, en consecuencia, es espacio vectorial

Fecha de Realización: 15-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 16: Espacios Vectoriales

1.- Pruebe que el siguiente es espacio vectorial

$U = \{ (x, y) \mid x, y \in R \}$

$U_1 = \{ (x, 2x) \mid x \in R \}$

Sean x, y, z $\in U_1$ arbitrarios y $\alpha, \gamma \in R$ dados

A1:

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x, 2x) + (y, 2y) \\
&= (x + y, 2x + 2y) \\
&= (x + y, 2(x + y)) \\
&= (y + x, 2(y + x)) \\
&= (y + x, 2y + 2x) \\
&= (y, 2y) + (x, 2x) \\
&= y + x
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x + y = y + x$

A2:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x, 2x) + [(y, 2y] + (z, 2z)] \\
&= (x, 2x + (y + z, 2y + 2z) \\
&= (x + (y + z), 2x + (2y + 2z)) \\
&= ((x + y) + z, (2x + 2y) + 2z) \\
&= (x + y, 2x + 2y) + (z, 2z) \\
&= [(x, 2x) + (y, 2y)] + (z, 2z) \\
&= (x + y) + z
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x + (y + z) = (x + y) + z$

A3:

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= (x, 2x) + (0, 0) \\
&= (x + 0, 2x + 0) \\
&= (x + 2x) \\
&= x
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x + 0 = x$

A4:

$x + (a) = 0 \rightarrow (x, 2x) + (a, 2a) = (0, 0)$

Por suma término a término se tiene:

$x + a = 0, \qquad 2x + 2a = 0$

Que al resolver para a se tiene:

$a = -x, \qquad a = -x$ y en consecuencia:

$$
\begin{aligned}
a &= ((-x), 2(-x)) = ((-1)x, (-1)2x) \\
&= -1(x, 2x) = -1(x) = -x
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x - x = 0$

M_1:

$$\begin{aligned}\alpha(x+y) &\rightarrow \alpha([x, 2x] + [y, 2y]) \\ &= \alpha(x+y, 2x+2y) \\ &= (\alpha x+\alpha y, 2\alpha x+2\alpha y) \\ &= (\alpha x, 2\alpha x) + (\alpha y, 2\alpha y) \\ &= \alpha x + \alpha y\end{aligned}$$

$\therefore \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

M_2:

$$\begin{aligned}(\alpha+\gamma)x &= (\alpha+\gamma)(x, 2x) \\ & [(\alpha+\gamma)x, (\alpha+\gamma)2x] \\ &= (\alpha x+\gamma x, \alpha 2x+\gamma 2x) \\ &= (\alpha x, 2\alpha x) + (\gamma x + 2\gamma x) \\ &= \alpha x + \gamma x\end{aligned}$$

$\therefore (\alpha+\gamma)x = \alpha x + \gamma x$

M_3:

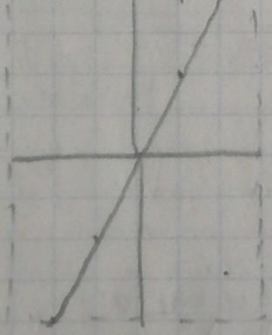
$$\begin{aligned}(\alpha\gamma)x &= (\alpha\gamma)(x, 2x) \\ &= [(\alpha\gamma)x, (\alpha\gamma)2x] \\ &= \alpha(\gamma x, \gamma 2x) \\ &= \alpha[\gamma(x, 2x)] \\ &= \alpha(\gamma(x))\end{aligned}$$

$\therefore (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x)$

$$\begin{aligned}(1)x &= (1)(x, 2x) \\ &= ((1)x, (1)2x) \\ &= (x, 2x) \\ &= x\end{aligned}$$

$\therefore (1)x = x$

Es espacio vectorial



$y = 2x$

$U_2 = \{(0,0)\}$ ✓

Claramente

$U_1 \subset R^2$ y $U_2 \subset U_1$

$U_2 \subset R^2$

Nota: $A \subset B$ con A y B no vacios

sí y sólo si: $\forall x \cdot\rightarrow\cdot x \in A \rightarrow x \in B$

Si $A \not\subset B$

$\exists x \cdot\rightarrow\cdot x \in A \wedge x \notin B$

Fecha de Realización: 16-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 17: Subespacios Vectoriales

1.- Prueba

$U = R^3$

$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$

Claramente $W \subset R^3$

¿Es W un subespacio vectorial de R^3?

Sean $X = (x_1, y_1, 0)$, $Y = (x_2, y_2, 0) \in W$ arbitrarios y $\alpha \in R$ dado

1.- $x + y = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$

$\therefore x + y \in W$

2.- $\alpha x = \alpha(x_1, y_1, 0)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1, 0)$

$\therefore \alpha x \in W$

En consecuencia W es subespacio vectorial de R^3

2.- Prueba

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f \in R \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, c, d \in R \right\}$$

¿Es W subespacio vectorial de U?

En W se encuentra el 0

Sean $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{13} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

arbitrarios y $\alpha \in R$

1.- $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & (a_{11} + a_{13}) + (b_{11} + b_{13}) & b_{11} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & 0 + 0 & 0 + 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A + B \in W$

2.- $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha(a_{11} + a_{13}) & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \alpha A \in W$

En consecuencia W es subespacio vectorial de U.

3 - Prueba

$U = \{a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in R\}$

$W_1 = \{at \mid a \in R\}$

El 0 está

1:

Sean $p(t) = at$, $q(t) = bt \in W$ arbitrarios y $\alpha \in R$ dado

y $p(t) + q(t) = at + bt$

$= (a+b)t \Rightarrow (a+b)t \in R$

$\therefore p(t) + q(t) \in R$

2:

$\alpha(p(t)) = \alpha(at) = (\alpha a)t \Rightarrow (\alpha a)t \in R$

En consecuencia W_1 es subespacio vectorial

$W_2 = \{a_2 t^2 + a_0 \mid a_2, a_0 \in R\}$

4- Prueba

$U = C((-\infty, \infty)) = \{f : R \to R \mid f \text{ es continua}\}$

$W = \{f : R \to R \mid f(0) = 0\}$

Sean $f, g \in W$ arbitrarias y $\alpha \in R$ dado

f, g son continuos y además $f(0) = 0$ y $g(0) = 0$

$0 + 0 = 0$

$\therefore$ El 0 existe

1: $f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$

$\therefore f + g \in W$

2: $(\alpha f)(x) = (\alpha)(f(x))$

$(\alpha f)(0) = \alpha(f(0))$

$= \alpha(0)$

$= 0$

$\therefore \alpha f \in W$

5 - Para el mismo espacio U de 4:

Sea $W_2 = \{f : R \to R \mid f(0) = 5\}$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x + 5 \\ g(x) &= 5 - x \\ h(x) &= \sqrt{25 - x^2} \end{aligned}\right\} \text{Claramente no es vacío}$$

Pero claramente este conjunto no es subespacio vectorial pues si $f(x) = x + 5 \in W_2$ y al tomar $\alpha = -1$

$(\alpha f)(x) = (-1)(x+5) = -x - 5$ y $(\alpha f)(0) = -5 \neq 5$

$\therefore$ No es espacio vectorial

6.- $U = \mathbb{R}^3$

$W = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge y > 0 \}$

Es claro que $W \subset \mathbb{R}^3$ y también W no es subespacio de $\mathbb{R}^3$, pues $(-3, 1, 2) \in W$ pero $\alpha(-3, 1, 2) \notin W$ porque si $\alpha = 0$

$\alpha(-3, 1, 2) = (0, 0, 0)$

7.- $U = \mathbb{R}^2$

$W = \{ (x, 3x - 2) \mid x \in \mathbb{R} \}$

$W \subset \mathbb{R}^2$

Claramente W no es subespacio de $\mathbb{R}^2$ pues:

Sea $x = (1, 1)$, $y = (2, 4) \in W$

Pero $x + y \rightarrow (1, 1) + (2, 4) = (1 + 2, 1 + 4) = (3, 5)$

$\therefore x + y = (3, 5) \notin W$

8.- $U = M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; b + c = 3 \right\}$$

Como $b + c = 3 \rightarrow c = 3 - b$

$$\therefore W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 3 - b & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Claramente W no es subespacio de U pues:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in W$

Pero $A + B = \begin{bmatrix} 1 + 3 & 1 + 0 \\ 2 + 3 & 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore A + B \notin W$

9.- $U = \{ at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$W = \{ t^2 + (a + b)t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$W \subset U$ $\qquad$ W no es vacío

Claramen W no es subespacio de U pues;

$p(t) = t^2 \in W$ y al tomar $\alpha = 3$

Entonces $\alpha(p(t)) = 3(t^2) = 3t^2 \notin W$

Fecha de Realización: 18-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 18: Combinación Lineal

1.- Determinar si el vector $U = (7, 1, 16)$ es combinación lineal de los vectores $U_1 = (-1, 2, 2)$ y $U_2 = (3, -1, 4)$

Sean $C_1, C_2 \in R$ (por determinarse) tal que

$$(7, 1, 16) = C_1(-1, 2, 2) + C_2(3, -1, 4)$$
$$= (-C_1 + 3C_2, 2C_1 - C_2, 2C_1 + 4C_2)$$

Por igualdad de vectores

$$-C_1 + 3C_2 = 7$$
$$2C_1 - C_2 = 1$$
$$2C_1 + 4C_2 = 16$$

Aplicando sistemas de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 + 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$-C_1 + 3C_2 = 7$$
$$5C_2 = 15 \to C_2 = 3$$
$$\therefore -C_1 + 3(3) = 7$$
$$-C_1 = 7 - 9 \Rightarrow -C_1 = -2 \therefore C_1 = 2$$

$\therefore$ U es combinación lineal de U_1 y U_2

2.- Probar que $p(x) = 1 + x$ es o no combinación lineal de $q(x) = x$, $r(x) = 2 + 3x$

Sean C_1 y $C_2 \in R$ (por determinarse) tales que

$$p(x) = C_1(q(x)) + C_2(r(x))$$
$$1 + x = C1(x) + C_2(2 + 3x)$$
$$= C_1 x + 2C_2 + 3C_2 x$$
$$1 + x = 2C_2 + (C_1 + 3C_2)x$$

Por igualdad de polinomios:

$$2C_2 = 1$$
$$C_1 + 3C_2 = 1 \quad \therefore \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$C_2 = \frac{1}{2}$$
$$C_1 = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $p(x)$ es combinación lineal de $q(x)$ y $r(x)$

3.- Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

¿Es A Combinación lineal de B y C?

Sean C_1 y $C_2 \in R$ por determinar tal que

$$A = C_1 B + C_2 C$$

4.- Probar que: El vector $(x, y) \in R^2$ es combinación lineal de $(1,-1), (1,1)$

Sean $c_1, c_2 \in R$ (por determinarse) tales que:

$c_1(1,-1) + c_2(1,1) = (x,y)$

Por igualdad de vectores

$$c_1 + c_2 = x$$
$$-c_1 + c_2 = y$$

Por regla de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x - y$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{vmatrix} = x + y$$

$$C_1 = \frac{x-y}{2} \qquad C_2 = \frac{x+y}{2}$$

5.- Probar que el polinomio $ax^2 + bx + c$ es combinación lineal de $p(x) = x^2 + x - 1$, $q(x) = x^2 - x + 1$, $r(x) = 1 + x - x^2$

Sean $c_1, c_2, c_3 \in R$ (por determinarse) tales que

$$ax^2 + bx + c = c_1 p(x) + c_2 q(x) + c_3 r(x)$$
$$= c_1(x^2 + x - 1) + c_2(x^2 - x + 1) + c_3(-x^2 + x + 1)$$

Se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [-1-1-1] - [-1+1+1] = -3 - (1) = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = [-a-b+c] - [c+a+b] = -2a - 2b$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & b & 1 \\ -1 & c & 1 \end{vmatrix} = [-a+b-c] - [b+c+a] = -2a - 2c$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & c \end{vmatrix} = [-c-b-a] - [a+b+c] = -2b - 2c$$

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad c_2 = \frac{a+c}{2}, \quad c_3 = \frac{b+c}{2}$$

Fecha de Realización: 21-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 19: Espacio Generado

1.- Probar que $P_1(R)$ es generado por $1-x$, $x-1$

$P_1(R) = \{a + bx \mid a, b \in R\}$

Queremos probar que

$\mathcal{L}\{1-x, x-1\} = P_1(R)$

Es decir queremos probar

$\mathcal{L}\{1-x, x-1\} \subset P_1(R)$ y $P_1(R) \subset \mathcal{L}\{1-x, x-1\}$

$\subset$

Como $\{1-x, x-1\} \subset P_1(R)$ por la forma de $P_1(R)$

$\rightarrow \mathcal{L}\{1-x, x-1\} \subset \mathcal{L}\{P_1(R)\}$

$\therefore \mathcal{L}\{1-x, x-1\} \subset P_1(R)$

$\supset$

Sea $p(x) = a + bx \in P_1(R)$ arbitrario

$\mathcal{L}\{1-x, x-1\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden hacer con los vectores del conjunto

Ahora sean $c_1, c_2 \in R$ (por determinarse) tales que $a + bx = c_1(1-x) + c_2(x-1)$

Así:

$$a + bx = c_1 - c_1x + c_2x - c_2$$
$$a + bx = (c_1 - c_2) + (-c_1x + c_2x)$$

Por igualdad de polinomios:

$$c_1 - c_2 = a$$
$$-c_1 + c_2 = b$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a+b \end{array}\right]$$

Esto implica que:

$$a + bx \notin \mathcal{L}\{1-x, x-1\}$$

Que quiere decir:

$$P_1(R) \not\subset \mathcal{L}\{1-x, x-1\}$$

Y en consecuencia

$\mathcal{L}\{1-x, x-1\} \neq P_1(R)$

2.- Probar que $P_1(R)$ es generado por $1-x$, $x+1$

$P_1(R) = \{a + bx \mid a, b \in R$

Fecha de Realización: 22-Octubre-2018

Ejercicios en Clase 20: Espacio Generado

1- Probar que $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ generan (o no) a R^3

Tenemos que probar que

$$\mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} = R^3$$

Es decir, probar que:

$$\mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subset R^3$$
$$R^3 \subset \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

$\subset$

Claramente $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subset R^3$

$\rightarrow \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subset R^3$

$\therefore \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subset R^3$

$\supset$

Sea $(x,y,z) \in R^3$ arbitrario y $c_1, c_2, c_3 \in R$ (por determinar) tal que

$$(x,y,z) = c_1(1,1,0) + c_2(1,0,1) + c_3(0,1,1)$$
$$(x,y,z) = (c_1+c_2,\ c_1+c_3,\ c_2+c_3)$$

Por igualdad de vectores:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x \\ c_1 + + c_3 &= y \\ c_2 + c_3 &= z \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = z - x - y$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix} = y - z - x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = x - y - z$$

$$c_1 = \frac{x+y-z}{2}, \quad c_2 = \frac{x-y+z}{2}, \quad c_3 = \frac{z+y-x}{2}$$

$\therefore (x,y,z) \subset \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

Por tanto

$R^3 \subset \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

$\therefore R^3 = \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

2.- ¿Es $M_{2\times2}$ generado por $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$?

Es decir

$$M_{2\times2} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

$\subset$

Claramente

$\{\dots\} \subset M_{2\times2}$

$\rightarrow \mathcal{L}\{\dots\} \subset M_{2\times2}$

$\therefore \mathcal{L}\{\dots\} \subset M_{2\times2}$

$\supset$

Sea $\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix} \in M_{2\times2}$ y $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ (por determinarse)

tal que: $\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4\\ c_3+c_4 & c_4\end{bmatrix}$

Por igualdad de matrices

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3+c_4 &= x\\ c_2+c_3+c_4 &= y\\ c_3+c_4 &= z\\ c_4 &= w \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&x\\ 0&1&1&1&y\\ 0&0&1&1&z\\ 0&0&0&1&w \end{array}\right]$$

$c_4 = w$

$c_3 = z - w$

$c_2 = y - w - z$

$c_1 = x - y - z - w$

3.- Probar que $\mathcal{L}\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\} = \mathbb{R}^2$

Ello quiere decir que

$\mathcal{L}\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\} \subset \mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{L}\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$

$\subset$

Claramente

$\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$

Ahora ello implica que

$\mathcal{L}\{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{L}\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\} \subset \mathbb{R}^2$

$\supset$

Para que $\mathbb{R}^2 \subset \mathcal{L}\{\hat{i}, \hat{j}\}$

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (por determinarse) tal que

$$(x, y) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1)$$
$$(x, y) = (c_1, 0) + (0, c_2)$$
$$(x, y) = (c_1, c_2)$$

Por igualdad de vectores

$$c_1 = x$$
$$c_2 = y$$

Como $x, y \in \mathbb{R}$ entonces c_1, c_2 sí tienen solución y valor real

Fecha de Realización: 28-Octubre-2019

Ejercicios en Clase 21: Espacio Generado

1.- Probar que $\mathcal{L}\{(1,0),(0,1)\} = \mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\}$

Se harán

$\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(0,3)\}$

$\{(1,0),(1,3)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(0,1)\}$

Es claro que

$\{(1,0),(1,3)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(0,1)\}$

$\rightarrow \mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}\{(1,0),(0,1)\})$

$\therefore \mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\}$

Ahora para

$\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\}$

Para $(1,0) = 1(1,0) + 0(1,3)$

Para $(0,1) = -\frac{1}{3}(1,0) + \frac{1}{3}(1,3)$

Así

$\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(,3)\}$

$\rightarrow \mathcal{L}\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\})$

$\therefore \mathcal{L}\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathcal{L}\{(1,0),(1,3)\}$

Ambos generan a $\mathbb{R}^2$

Fecha de Entrega: 30-Octubre-2019

Tarea 9: Espacios Vectoriales

1- Determinar si los siguientes conjuntos son o no son espacios vectoriales

a) $V = \{ x \mid Ax = 0,\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \}$

Ojo: V es el conjunto de todas las soluciones del sistema

$$Ax = 0$$

Sean $x, y, z \in V$ arbitrarios y $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ dados

Para que V sea espacio vectorial se debe cumplir:

A_1:

Sabemos que $Ax = 0$, así como $Ay = 0$

Entonces $Ax + Ay = 0 + 0 = 0$

Por otro lado

$$Ay + Ax = 0 + 0 = 0$$

Entonces

$$Ax + Ay = 0 = Ay + Ax$$

Por producto entre matrices:

$$A(x+y) = A(y+x)$$

Por igualdad de productos

$$x + y = y + x$$

$\therefore\ x + y = y + x$

A_2:

Como $Ay + Az = 0 \rightarrow Ax + (Ay + Az) = Ax + (0) = 0 + 0 = 0$

Por otro lado, como $Ax + Ay = 0 \rightarrow (Ax + Ay) + Az = 0 + Az = 0 + 0 = 0$

Entonces

$$Ax + (Ay + Az) = 0 = (Ax + Ay) + Az$$

Por producto entre matrices

$$A[x + (y + z)] = A[(x + y) + z]$$

Por igualdad de productos

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$\therefore\ x + (y + z) = (x + y) + z$

A_3:

Sabemos que $Ax = 0$

Es claro que existe un elemento 0 en V

Entonces

$$Ax + 0 = 0 + 0 = 0 \quad \text{y como} \quad Ax = 0$$

$$Ax + 0 = 0 + 0 = Ax$$

Por producto entre matrices

$$A(x + 0) = A(x)$$

Por igualdad de productos

$$x + 0 = x$$

$$\therefore \quad x + 0 = 0$$

A_4:

Podemos ver que si

$$Ax = 0 \quad \text{entonces} \quad A(-x) = -(A\,x)$$
$$= (-1)(Ax)$$
$$(-1)(Ax) = (-1)(0)$$
$$-Ax = 0$$

Con lo anterior

$$Ax + (-Ax) = 0 + 0$$
$$Ax + (-Ax) = 0$$
$$Ax - Ax = 0$$

Por producto de matrices

$$A(x - x) = 0$$

También, el 0 puede verse generado como:

$$A(x - x) = A(0)$$

Pues $A(0) = 0$

Así, por igualdad de productos

$$x - x = 0$$
$$\therefore \quad x - x = 0$$

M_1:

Partimos de

$$\alpha(Ax + Ay)$$

Que, sabemos que $Ax = 0$ y $Ay = 0$, entonces

$$\alpha(Ax + Ay) = \alpha(0 + 0)$$
$$= \alpha(0)$$
$$= 0$$

Asimismo, partiendo de

$$\alpha(Ax) + \alpha(Ay) = \alpha(0) + \alpha(0)$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Entonces

$$\alpha(Ax + Ay) = 0 = a(Ax) + a(Ay)$$
$$\rightarrow \alpha(Ax + Ay) = a(Ax) + \alpha(Ay)$$
$$\rightarrow \alpha[A(x + y)] = A[\alpha(x) + \alpha(y)]$$
$$\rightarrow A[\alpha(x + y)] = A[\alpha(x) + \alpha(y)]$$

Por igualdad de productos

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$$
$$\therefore \quad \alpha(x + y) = ax + \alpha y$$

M_2:

Partimos de

$$(\alpha+\gamma)Ax$$

Como $Ax = 0$

$$(\alpha+\gamma)(0) = 0$$

Por otro lado

$$\alpha(Ax) + \gamma(Ax) = \alpha(0) + \gamma(0)$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Entonces

$$(\alpha+\gamma)Ax = 0 = \alpha(Ax) + \gamma(Ax)$$
$$A[(\alpha+\gamma)x] = A[\alpha(x) + \gamma(x)]$$

Por igualdad de vectores

$$(\alpha+\gamma)x = \alpha(x) + \gamma(x)$$
$$\therefore (\alpha+\gamma)x = \alpha(x) + \gamma(x)$$

M_3:

Partimos de

$$\alpha\gamma(Ax)$$

Como $Ax = 0$

$$\alpha\gamma(0) = 0$$

Por otro lado

$$\alpha(\gamma Ax) = \alpha[\gamma(0)]$$
$$= \alpha[0]$$
$$= 0$$

Entonces

$$\alpha\gamma(Ax) = 0 = \alpha(\gamma Ax)$$
$$A[\alpha\gamma(x)] = A[\alpha(\gamma x)]$$

Por igualdad de productos

$$\alpha\gamma(x) = \alpha(\gamma x)$$
$$\therefore \alpha\gamma(x) = \alpha(\gamma x)$$

M_4:

Con $(1)Ax$ sabemos que $Ax = 0$, por lo que

$$(1)Ax = (1)(0)$$
$$= 0$$

Sin embargo, como $0 = Ax$, entonces

$$(1)Ax = Ax$$
$$A[(1)x] = A[x]$$

Por igualdad de productos

$$(1)x = x$$
$$\therefore (1)x = x$$

Entonces V es espacio vectorial

$(0,0)$ $(2,3)$ $(1,4)$
$(1,0)$

b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$ con las operaciones de suma de matrices y producto por un escalar

Sean $x, y, z \in V$ arbitrarios y $\alpha, \gamma \in R$ dados tales que:

$$x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

Para que V sea Espacio Vectorial, debe cumplirse:

A_1:

$$x + y \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -b_1 + (-b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

Por propiedad conmutativa en los números reales

$$= \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ -b_2 + (-b_1) & a_2 + a_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$
$$= y + x$$

$\therefore \; x + y = y + x$

A_2:

$$x + (y + z) \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ -b_2 + (-b_3) & a_2 + a_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & b_1 + (b_2 + b_3) \\ -b_1 + [-b_2 + (-b_3)] & a_1 + (a_2 + a_3) \end{bmatrix}$$

Por propiedad asociativa en los números reales

$$= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & (b_1 + b_2) + b_3 \\ [-b_1 + (-b_2)] + (-b_3) & (a_1 + a_2) + a_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -b_1 + (-b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$
$$= (x + y) + z$$

$\therefore \; x + (y + z) = (x + y) + z$

A_3:

Si para $t \in V$, $a = 0$, $b = 0$ entonces

$$t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ entonces } t = 0$$

Ahora:

$$x + 0 \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + 0 & b_1 + 0 \\ (-b_1) + 0 & a_1 + 0 \end{bmatrix}$$

Por propiedad del neutro aditivo en los números reales

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= x$$

$\therefore \quad x + 0 = x$

A4:

Sea $n \in V \ni x + n = 0$ entonces:

$$x + n = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por suma de matrices se tiene:

$$a_1 + a_n = 0 \Rightarrow a_n = -a_1$$
$$b_1 + b_n = 0 \Rightarrow b_n = -b_1$$
$$-b_1 + (-b_n) = 0 \Rightarrow -b_n = b_1$$

De modo que n también es:

$$n = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)a_1 & (-1)b_1 \\ (-1)(-b_1) & (-1)a_1 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} = (-1)x = -x$$

Y dado que el sistema tiene solución y generó al elemento $-x$, entonces:

$\therefore \quad x - x = 0$

M1:

$$\alpha(x+y) \rightarrow \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -b_1 + (-b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) & \alpha(b_1 + b_2) \\ \alpha(-b_1 + (-b_2)) & \alpha(a_1 + a_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \alpha a_2 & \alpha b_1 + \alpha b_2 \\ -\alpha b_1 + (-\alpha b_2) & \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ -\alpha b_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ -\alpha b_2 & \alpha a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha x + \alpha y$$

$\therefore \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

M2:

$$(\alpha + \gamma)x \rightarrow (\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha+\gamma)(a_1) & (\alpha+\gamma)(b_1) \\ (\alpha+\gamma)(-b_1) & (\alpha+\gamma)(a_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \gamma a_1 & \alpha b_1 + \gamma b_1 \\ -\alpha b_1 + (-\gamma b_1) & \alpha a_1 + \gamma a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ -\alpha b_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma a_1 & \gamma b_1 \\ -\gamma b_1 & \gamma a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha x + \gamma x\ )$$

$$\therefore (\alpha+\gamma)x = \alpha x + \gamma x$$

M_3:

$$(\alpha\gamma)x \rightarrow (\alpha\gamma)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha\gamma)(a_1) & (\alpha\gamma)(b_1) \\ (\alpha\gamma)(-b_1) & (\alpha\gamma)(a_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(\gamma a_1) & \alpha(\gamma b_1) \\ -(\alpha)(\gamma b_1) & \alpha(\gamma a_1) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \gamma a_1 & \gamma b_1 \\ -(\gamma b_1) & \gamma a_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\left(\gamma \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\alpha(\gamma x)$$

$$\therefore (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x)$$

M_4:

$$(1)x \rightarrow (1)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)a_1 & (1)b_1 \\ (1)(-b_1) & (1)a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= x$$

$$\therefore (1)x = x$$

Entonces V es un espacio vectorial

c)

$$V = \left\{ \left[\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ c \\ d \end{bmatrix}\right] \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$ con las operaciones de~~a~~ suma de vectores y producto por un escalar

Sean $x, y, z \in V$ arbitrarios y $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ dados
Para que V sea un espacio vectorial, debe cumplirse:

A1:

$$x + y \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 + 0 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix}$$

Por propiedad conmutativa de los números reales

$$\begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ 0 + 0 \\ y_3 + x_3 \\ y_4 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = y + x$$

$\therefore x + y = y + x$

A2:

$$x + (y + z) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ 0 + 0 \\ y_3 + z_3 \\ y_4 + z_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ x_2 + (y_2 + z_2) \\ 0 + (0 + 0) \\ x_3 + (y_3 + z_3) \\ x_4 + (y_4 + z_4) \end{bmatrix} \rightarrow$$ Por propiedad asociativa de números reales

$$= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ (x_2 + y_2) + z_2 \\ (0 + 0) + 0 \\ (x_3 + y_3) + z_3 \\ (x_4 + y_4) + z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 + 0 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$= (x + y) + z$

$\therefore x + (y + z) = (x + y) + z$

A3:

Es claro que el 0 se encuentra en V, así que:

$$x + 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ 0 + 0 \\ x_3 + 0 \\ x_4 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x$$

$\therefore x + 0 = x$

A4:

Claramente existe un elemento $-x$ pues:

$$x - x \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -0 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (-x_1) \\ x_2 + (-x_2) \\ 0 - 0 \\ x_3 + (-x_3) \\ x_4 + (-x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore\ x - x = 0$

M1:

$$\alpha(x+y) \rightarrow \alpha\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}\right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 + 0 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \alpha(x_2 + y_2) \\ \alpha(0 + 0) \\ \alpha(x_3 + y_3) \\ \alpha(x_4 + y_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \alpha(0) + \alpha(0) \\ \alpha x_3 + \alpha y_3 \\ \alpha x_4 + \alpha y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha(0) \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \alpha(0) \\ \alpha y_3 \\ \alpha y_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \alpha x + \alpha y$$

$\therefore\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

M2:

$$(\alpha+\gamma)x \rightarrow (\alpha+\gamma)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\gamma)x_1 \\ (\alpha+\gamma)x_2 \\ (\alpha+\gamma)(0) \\ (\alpha+\gamma)x_3 \\ (\alpha+\gamma)x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \gamma x_1 \\ \alpha x_2 + \gamma x_2 \\ \alpha(0) + \gamma(0) \\ \alpha x_3 + \gamma x_3 \\ \alpha x_4 + \gamma x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha(0) \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma x_1 \\ \gamma x_2 \\ \gamma(0) \\ \gamma x_3 \\ \gamma x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha x + \gamma x$$

$\therefore\ (\alpha+\gamma)x = \alpha x + \gamma x$

M3:

$$(\alpha\gamma)x \rightarrow (\alpha\gamma)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\gamma)x_1 \\ (\alpha\gamma)x_2 \\ (\alpha\gamma)(0) \\ (\alpha\gamma)x_3 \\ (\alpha\gamma)x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\gamma x_1) \\ \alpha(\gamma x_2) \\ \alpha(\gamma(0)) \\ \alpha(\gamma x_3) \\ \alpha(\gamma x_4) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \gamma x_1 \\ \gamma x_2 \\ \gamma(0) \\ \gamma x_3 \\ \gamma x_4 \end{bmatrix} = \alpha\left(\gamma \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)$$

$= \alpha(\gamma x)$

$\therefore\ (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x)$

M4:

$(1)x \longrightarrow$

$$(1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)\,x_1 \\ (1)\,x_2 \\ (1)\,(0) \\ (1)\,x_3 \\ (1)\,x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x$$

$\therefore (1)x = x$

Entonces V es un espacio vectorial

d) $V = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0 \}$ con las operaciones de suma de matrices y producto por un escalar

Ojo: V es el conjunto de todas las matrices que no tienen matriz inversa

Es claro que V no es espacio vectorial, pues, sea $x, y \in V$ tal que

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Claramente x, y están en V, pero su suma no lo está, pues

$$x+y \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(x+y) = 7$$

Por lo tanto V no es espacio vectorial

e) $V = \{ p \in P \mid a_n = 1 \}$ con las operaciones de suma de polinomios y producto por un escalar

Es claro que V no es espacio vectorial, pues, sea $x, y \in V$ tal que

$$x = a^3 + 4a^2 + 2a + 6, \quad y = a^3 + 2a^2 + 9a + 2$$

Claramente x, y están en V, pero su suma no lo está, pues

$$x + y \rightarrow a^3 + 4a^2 + 2a + 6 + a^3 + 2a^2 + 9a + 2$$
$$= 2a^3 + 6a^2 + 11a + 8$$

$a_n = 2$ y no está en V la suma

Por lo tanto, V no es espacio vectorial

f) $V = \{ [a, b, 1, c, d] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$

Es claro que V no es espacio vectorial, pues sea $x, y \in V$ tal que

$$x = [1, 2, 1, 2, 1], \quad y = [0, 0, 1, 0, 0]$$

Claramente x, y están en V pero su suma no, pues

$$[1, 2, 1, 2, 1] + [0, 0, 1, 0, 0] = [1, 2, 2, 2, 1]$$

Por lo tanto, V no es espacio vectorial

Fecha de Entrega: 31-Octubre-2019

Tarea 10: Subespacios Vectoriales

1.- Probar que los siguientes subconjuntos de R^2 son subespacios de este conjunto

a) $\{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

Es claro que el 0 existe en W pues $(0,0) \in W$
pero la suma no se cumple, pues
$(1,1), (1,0) \in W$ pero
$(1,1) + (1,0) = (2,1) \notin W$
$\therefore$ W no es subespacio vectorial

b) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

Con $(0.5, 0.5) \in W$
$2(0.5, 0.5) = (1,1) \notin W$
$\therefore$ W no es subespacio vectorial

2.- Determinar si los siguientes subconjuntos de R^4 son subespacios de este conjunto

a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 1 = 0$

Claramente no es subespacio pues el 0:
$(0,0,0,0) \rightarrow 2(0) + 3(0) - (0) + (0) + 1 = 1 \neq 0$
Y no está en W
$\therefore$ W no es subespacio vectorial

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2, x_3 = 2x_4\}$

1.
Vemos que el 0 sí se encuentra en W, pues
(0,0,0,0) está en el conjunto
$\therefore 0 \in W$

2.
Sean $a, b \in W$ arbitrario
$a + b \rightarrow (a_1, a_1, a_3, \frac{a_3}{2}) + (b_1, b_1, b_3, \frac{b_3}{2})$
$= (a_1 + b_1, a_1 + b_1, a_3 + b_3, \frac{a_3 + b_3}{2})$
Vemos que el primer elemento es igual al segundo y el tercero es dos veces el cuarto
$\therefore a + b \in W$

3.
Sea $a \in W$ arbitrario y $\gamma \in R$ dado
$\gamma a \rightarrow \gamma(a_1, a_1, a_3, \frac{a_3}{2})$
$= (\gamma a_1, \gamma a_1, \gamma a_3, \frac{\gamma a_3}{2})$
Vemos que el primer elemento es igual al segundo y el tercero

es dos veces el cuarto

$\therefore \gamma a \in W$ y W es subespacio vectorial

3.- Determinar si los siguientes subconjuntos de $P_2(R)$ son subespacios de este conjunto

a) $\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 + a_1 = 0\}$

1.

Vemos que el 0 si está en W, pues

$0 \in P_2$

$\therefore 0 \in P_2$

2.

Sean $p(x), q(x) \in P_2$ tal que

$$p(x) = p_0 - p_0 x + p_2 x^2$$

$$q(x) = q_0 - q_0 x + q_2 x^2$$

$$p(x) + q(x) \rightarrow p_0 + q_0 - p_0 x - q_0 x + p_2 x^2 + q_2 x^2$$

$$= (p_0 + q_0) + (-p_0 - q_0)x + (p_2 + q_2)x^2$$

Así $(p_0 + q_0) + (-p_0 - q_0) = 0$

$\therefore p(x) + q(x) \in W$

3.

Sea $p(x) \in P_2$ arbitrario y $\alpha \in R$ dado

$$\alpha p(x) \rightarrow \alpha p_0 - \alpha p_0 x + \alpha p_2 x^2$$

$$\alpha p_0 - \alpha p_0 = 0$$

$\therefore \alpha p(x) \in W$ y W si es subespacio vectorial

b) $\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_2 = 1\}$

Es claro que W no es subespacio de $P_2(R)$, pues no cumple con la condición de que la suma esté en el conjunto, pues sea $p(x) = 3 + 4x + x^2$, $q(x) = 6 + x + x^2$

Claramente p y q están en W

Pero $p(x) + q(x) \Rightarrow 3 + 4x + x^2 + 6 + x + x^2$

$$9 + 5x + 2x^2$$

y el coeficiente a_2 de $p + q$ es 2, por lo que el polinomio no está en el conjunto

$\therefore W$ no es subespacio de $P_2(R)$

4.- Determinar si los siguientes subconjuntos de $M_{n\times n}$ son subespacios de ese conjunto

a) $\{A = [a_{ij}],\ i,j = 1, 2, \ldots, n \mid a_{ij} = 0$ si $i \neq j\}$

La generalización de elementos de W se puede expresar de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.

Vemos que el si está en W pues al no haber restricciones para a_{ii} $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Entonces existe

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore$ $0 \in W$

2.

Sean $A, B \in W$, entonces

$$A + B \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 + 0 & \dots & 0 + 0 \\ 0 + 0 & a_{22} + b_{22} & \dots & 0 + 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + 0 & 0 + 0 & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

Asi $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$

$\therefore$ $A + B \in W$

3.

Sea $A \in W$ arbitrario y $\alpha \in R$ dado

$$\alpha A \rightarrow \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & \alpha(0) & \dots & \alpha(0) \\ \alpha(0) & a(a_{22}) & \dots & \alpha(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(0) & \alpha(0) & \dots & \alpha(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha(a_{22}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

Asi $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$

$\therefore$ $\alpha A \in W$

En consecuencia W es subespacio vectorial

b) $\{A \in M_{n\times n} \mid A^T = A\}$

$$A \in W \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Descubrimos que $a_{ij} = a_{ji}$

Bajo la condición anterior, claramente el 0 está en W

Ahora, con $a, b \in W$, $a+b \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \end{bmatrix}$$

Vemos que la condición sí se cumple, así que $a+b \in W$

Ahora, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha a \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{12} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{1n} & \alpha a_{2n} & \dots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

Y la condición también cumple así que $\alpha a \in W$
Y en consecuencia W es subespacio vectorial de $\mathbb{M}_{n\times n}$

c) $\{A \in \mathbb{M}_{n\times n} \mid A^T = -A\}$

$$A \in W \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Descubrimos que para $i = j \quad a_{ij} = -a_{ij} \Rightarrow$ sólo ocurre si $a_{ij} = 0$
$i \neq j \quad a_{ij} = -a_{ji}$

Bajo las condiciones anteriores, claramente el 0 está en W

Ahora, $a, b \in W$, $a+b \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ -a_{12}-b_{12} & 0+0 & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}-b_{1n} & -a_{2n}-b_{2n} & \dots & 0+0 \end{bmatrix}$$

Vemos que las condiciones sí se cumplen, así que $a+b \in W$

Ahora, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha a =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ -\alpha a_{12} & 0 & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha a_{1n} & -\alpha a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Y la condición también se cumple, así que $\alpha a \in W$
Y en consecuencia W es subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}$

Fecha de Realización: 1° - Noviembre - 2019

Ejercicios en Clase 22: Independencia Lineal

1.- $\{(2,4,3), (-5,-2,-5), (4,-8,1)\}$

$(0,0,0) = c_1(2,4,3) + c_2(-5,-2,-5) + c_3(4,-8,1)$

$$2c_1 - 5c_2 + 4c_3 = 0$$
$$4c_1 - 2c_2 - 8c_3 = 0$$
$$3c_1 - 5c_2 + c_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-4 - 120 - 80) - (-24 - 80 - 20)$$
$$= (-204) - (-124)$$
$$= -204 + 124$$
$$= \cancel{-80}$$

$$\Delta = 0$$

c_1, c_2 y c_3 no necesariamente serán 0
Lo que implica que el sistema tiene un número infinito de soluciones (no nula)
Son linealmente dependientes

2.- $\{1-x,\ x^2+1,\ 2-x,\ x^3,\ -3+2x-2x^2\}$ en $P_3(R)$

Sean $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in R$ (por determinarse) tales que

$$0 = c_1(1-x) + c_2(x^2+1) + c_3(2-x) + c_4(x^3) + c_5(-3+2x-2x^2)$$
$$0 = c_1 - \underline{c_1x} + \underline{c_2x^2} + c_2 + 2c_3 - \underline{c_3x} + \underline{c_4x^3} - 3c_5 + \underline{2c_5x} \underline{-2c_5x^2}$$
$$0 = (c_4)x^3 + (c_2 - 2c_5)x^2 + (-c_1 - c_3 + 2c_5)x + (c_1 + c_2 + 2c_3 - 3c_5)$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} & & c_4 & & = 0 \\ & c_2 & & -2c_5 & = 0 \\ -c_1 & & -c_3 & +2c_5 & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +2c_3 & -3c_5 & = 0 \end{array}\right\}$$

La teoría nos dice que el sistema tiene infinitas soluciones

$= \{c_5(3, 2, -1, 0, 1) \mid c_5 \in R\}$

$= \mathcal{L}\{(3, 2, -1, 0, 1)\}$

El conjunto es L. D.

3.- $\{\cos(x), \cos(-x)\}$ funciones en R

Sean $c_1, c_2 \in R$ tales que

$$c_1(\cos(x)) + c_2(\cos(-x)) = 0$$
$$-c_1(\operatorname{sen}(x)) + c_2(\cos(-x)) = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos(x) & \cos(-x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \operatorname{sen}(-x) & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos(x) & \cos(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & -\operatorname{sen}(x) & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}$$

Se está resolviendo la ecuación diferencial

$y'' = -y$

Su determinante

$$-\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)$$
$$= 0$$

El conjunto es L. D. $\forall x \in R$

e) $\{\operatorname{sen}(x) \quad \cos(x)\}$ en funciones de R

f) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Sean $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ por determinarse tales que

$$c_1\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 - c_2 + c_3 + c_4 \\ c_1 + c_2 - c_3 + c_4 & c_1 + c_2 + c_3 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$= -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(4) - 1(4) + 1(-4) - 1(4)$$
$$= -4 - 4 - 4 - 4 = -16$$

El sistema tiene solución única y es $c_1, c_2, c_3, c_4 = 0$

$\therefore$ El conjunto es L. I.

$\{(1,2,3), (7,9,8), (4,-3,2)\}$ ¿son L.I.?

Sean $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ por determinarse tales que

$$(0,0,0) = c_1(1,2,3) + c_2(7,9,8) + c_3(4,-3,2)$$

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 + 4c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 - 3c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 8c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & -3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(18 - 63 + 64) \\ &-(108 - 24 + 28 \\ &19 - 112 \\ &-93 \end{aligned}$$

Como el sistema es homogeneo y el determinante es distinto de 0, tiene solución única y por definición del sistema homogéneo, su solución es 0

$\therefore$ es L. I.

Fecha de Realización: 4-Noviembre-2019

Ejercicios en Clase 23: Base y Dimensión

1.- ¿Es $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ base para $P_2(R)$?

Primero se comprobará que generan un espacio:

Para que $\mathcal{L}\{1, 1+x, 1+x+x^2\} = P_2(R)$ se hará

$\mathcal{L}\{1, 1+x, 1+x+x^2\} \subset$

$P_2(R) \subset \mathcal{L}\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$

$\subset$: $\mathcal{L}\{1, 1+x, 1+x+x^2\} \subset P_2(R)$

Claramente

$\{1, 1+x, 1+x+x^2\} \subset P_2(R)$

$\mathcal{L}\{1, 1+x, 1+x+x^2\} \subset P_2(R)$

$\supset$: $P_2(R) \subset \mathcal{L}\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$

Sea $a+bx+cx^2$

Fecha de Realización: 6-Noviembre-2019

Ejercicios en Clase 24: Base y Dimensión

1.- Para $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

¿Es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ una base?

Para probar que es una base, primero hay que probar que genera:

$\mathcal{L}\{\ldots\} = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\subset$:

Vemos que:

$\{\ldots\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\rightarrow \mathcal{L}\{\ldots\} \subset \mathcal{L}\,\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\{\ldots\} \subset \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\therefore \mathcal{L}\{\ldots\} \subset \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\supset$:

Para $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}\{\ldots\}$

Sea $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ arbitrario

Sea $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ por determinarse tal que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 & -c_1 + c_2 + c_3 - c_4 \\ 2c_1 + c_2 + c_4 & c_1 - c_3 + 2c_4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 &= a_{11} \\ -c_1 + c_2 + c_3 - c_4 &= a_{12} \\ 2c_1 + c_2 + c_4 &= a_{21} \\ c_1 - c_3 + 2c_4 &= a_{22} \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & a_{11} \\ -1 & 1 & 1 & -1 & a_{12} \\ 2 & 1 & 0 & 1 & a_{21} \\ 1 & 0 & -1 & 2 & a_{22} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - R_1 \rightarrow R_4}]{R_2 + R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & a_{11} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & a_{11} + a_{12} \\ 0 & -3 & -2 & -3 & a_{21} - 2a_{11} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & a_{22} - a_{11} \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{bmatrix}$$

Fecha de Entrega: 8 - Noviembre - 2019

Tarea 11: Combinación Lineal

1.- Probar que el vector v es combinación lineal de los vectores u_i:

a) $v = [-3, 2]$, $u_1 = [1, -1]$, $u_2 = [-3, 2]$ en $\mathbb{R}^2$

Sean c_1, c_2 en $\mathbb{R}$ tales que

$$[-3, 2] = c_1[1, -1] + c_2[-3, 2]$$

$$[-3, 2] = [c_1 - 3c_2, -c_1 + 2c_2]$$

$$\begin{aligned} c_1 - 3c_2 &= -3 \\ -c_1 + 2c_2 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, v es combinación lineal de u_1, u_2

b) $v = [1, 5]$, $u_1 = [-1, 2]$, $u_2 = [-3, 6]$ en $\mathbb{R}^2$

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$[1, 5] = c_1[-1, 2] + c_2[-3, 6]$$

$$[1, 5] = [-c_1 - 3c_2, 2c_1 + 6c_2]$$

$$\begin{aligned} -c_1 - 3c_2 &= 1 \\ 2c_1 + 6c_2 &= 5 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right] !$$

El sistema no tiene solución, así c_1, c_2 no tienen valores, entonces v no es combinación lineal de u_1, u_2

c) $v = [-1, 1, 4]$, $u_1 = [1, -1, 3]$, $u_2 = [3, -2, 2]$, $u_3 = [2, -1, 3]$ en $\mathbb{R}^3$

Sean $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$[-1, 1, 4] = c_1[1, -1, 3] + c_2[3, -2, 2] + c_3[2, -1, 3]$$

$$[-1, 1, 4] = [c_1 + 3c_2 + 2c_3, -c_1 - 2c_2 - c_3, 3c_1 + 2c_2 + 3c_3]$$

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= -1 \\ -c_1 - 2c_2 - c_3 &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 7R_2 \to R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= -1 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ 4c_3 &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow c_3 = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow c_2 = -\frac{7}{4} \quad \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4}$$

Por tanto v es combinación lineal de u_1, u_2, u_3

d) $v = [-11, 6, 7, -2]$, $u_1 = [1, 0, -2, 4]$, $u_2 = [-3, 2, 1, 2]$ en $\mathbb{R}^4$

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$v = [c_1 - 3c_2, 2c_2, -2c_1 + c_2, 4c_1 + 2c_2]$$

$$\begin{aligned} c_1 - 3c_2 &= -11 \\ 2c_2 &= 6 \\ -2c_1 + c_2 &= 7 \\ 4c_1 + 2c_2 &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - 4R_1 \to R_4]{R_3 + 2R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 19 \\ 0 & -10 & 46 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 + 5R_2 \to R_4]{R_3 - \frac{7}{2}R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 76 \end{array}\right] \overset{\nabla}{0} \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$\therefore$ v no es combinación lineal de u_1, u_2

e) $v = [8, -10, -1, -9, -17]$, $u_1 = [1, 1, 1, 0, -1]$, $u_2 = [-2, 3, 1, 2, 3]$, $u_3 = [-7, 8, 2, 6, 10]$, $u_4 = [-2, 0, 1, -1, -3]$ en $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_2 - 7c_3 - 2c_4 &= 8 \\ c_1 + 3c_2 + 8c_3 &= -10 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 &= -1 \\ 2c_2 + 6c_3 - c_4 &= -9 \\ -c_1 + 3c_2 + 10c_3 - 3c_4 &= -17 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & -9 \\ -1 & 3 & 10 & -3 & -17 \end{array}\right] \xrightarrow[R_5 + R_1 \to R_5]{\substack{R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 15 & 2 & -18 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 - 5R_5 \to R_5]{\substack{R_4 - 2R_5 \to R_4 \\ R_3 - 3R_5 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{9}R_4 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 - 27R_4 \to R_2]{R_3 - 18R_4 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftrightarrow R_3]{R_5 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c_4 = 1$

$c_2 + 3c_3 = -4 \Rightarrow c_2 = -4 - 3c_3$

$c_1 + 8 + 6c_3 - 7c_3 = 10 \Rightarrow c_1 = 2 + c_3$

$S = \{[2 + c_3, -4 - 3c_3, c_3, 1] \mid c_3 \in \mathbb{R}\}$

$\therefore$ v es combinación lineal de u_1, u_2, u_3, u_4

f) $v = \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en M_{2x2}

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - 3c_3 &= -12 \\ -c_1 + c_3 &= 2 \\ 2c_1 + 2c_2 &= 2 \\ c_1 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -12 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Ignorando el renglón 2 (más adelante se usará)

$$c_1 - c_2 - 3c_3 = -12 \qquad \Rightarrow c_3 = 3$$

$$2c_1 + 2c_2 = 2 \qquad \Rightarrow c_2 = 2$$

$$c_1 = -1 \qquad \Rightarrow c_1 = -1$$

Ahora con el renglón 2

$$-c_1 + c_3 = 2$$

$$1 + 3 = 2$$

$$4 = 2 \; \underset{\circ}{\nabla}$$

El anterior es falso

∴ V no es combinación lineal de los otros

Fecha de Realización: 11-Noviembre-2019

Ejercicios en Clase 25: Espacio Renglon y Espacio Columna

1- $\operatorname{Im}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n,\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \ x_j,\ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \middle| \ a_{ij},\ x_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} \middle| \ a_{ij},\ x_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{ x_1 \mathrm{Col}_1 + x_2 \mathrm{Col}_2 + \cdots + x_n \mathrm{Col}_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathcal{L}\{ \mathrm{Col}_1, \mathrm{Col}_2, \ldots, \mathrm{Col}_n \}$$

$$= C_A$$

$\therefore\ C_A = \operatorname{Im}(A) \implies \rho(A) = \dim(\operatorname{Im}(A)) = \dim(C_A)$

2-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De $N_A \to \nu$

De R_A, $C_A \to \rho(A)$

$\operatorname{Im}(A)$

Para N_A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 4R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 + R_2 \to R_4]{R_3 - 7R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_4 + \frac{38}{5} R_3 \to R_4 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \implies N_A = \{(0,0,0)\}$$

$\nu(A) = 0$

$\rho(A) = 3$

Fecha de Entrega: 12-Noviembre-2019

Tarea 12: Espacio Generado

1-

a) Sean $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Probar que $\mathcal{L}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \mathbb{R}^3$

$\subset$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset R^3$

$\therefore \mathcal{L}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset R^3$

$\supset$

Para $R^3 \subset \mathcal{L}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Sea $a = [x_1, x_2, x_3] \in R^3$ arbitrario y $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad\quad + 2c_4 &= x_1 \\ -c_1 + 4c_2 \quad\quad + 3c_4 &= x_2 \\ 2c_2 + 5c_3 + 4c_4 &= x_3 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & x_1 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & x_2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & x_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & x_2 + x_1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \frac{5}{2} R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} & -5 & x_2 + x_1 - \frac{5}{2} x_3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & x_3 \end{array}\right]$$

$$c_1 + c_2 \quad + 2c_4 = x_1$$

$$2c_2 + 5c_3 + 4c_4 = x_3$$

$$-\frac{25}{2} c_3 - 5c_4 = x_2 \Rightarrow -\frac{25}{2} c_3 = x_2 + 5c_4$$

$$c_3 = -\frac{2x_2 + 10c_4}{25}$$

$$2c_2 - \frac{2x_2 + 10c_4}{5} + \frac{20c_4}{5} = x_3$$

$$2c_2 - \frac{2x_2}{5} + \frac{10c_4}{5} = x_3 \Rightarrow 2c_2 = x_3 + \frac{2x_2 - 10c_4}{5}$$

$$c_2 = \frac{x_3}{2} + \frac{x_2 - 5c_4}{5}$$

$$c_1 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_2}{5} - c_4 + 2c_4 = x_1$$

$$c_1 = x_1 - c_4 - \frac{x_3}{2} - \frac{x_2}{5} \Rightarrow$$ La contención se cumple

$\therefore \mathcal{L}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \mathbb{R}^3$

b) Probar que si se elimina cualquiera de e_1, e_2, e_4, los restantes todavía generan a $\mathbb{R}^3$

Sin $e_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 25$ Con solución única, e_2, e_3 y e_4 generan a $\mathbb{R}^3$

Sin e_2: $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -25 \Rightarrow$ Con sol. única
e_1, e_3, e_4 generan a $\mathbb{R}^3$

Sin e_4: $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 \Rightarrow$ Con sol. única
e_1, e_2, e_3 generan a $\mathbb{R}^3$

2- ¿Cuál de los siguientes: $[-3, -1, 15, 6], [1, 0, -1, 0] [1, 1, 1, 0]$ son elementos de $\mathcal{L}\{[-1, 3, 5, 2], [2, -1, 0, 1], [1, -8, 5, 3]\}$?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -8 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 15 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+5R_1 \to R_3]{R_2+3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_4 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \leftarrow$$

De R_3 vemos que los dos primeros sí son elementos del espacio, el otro no

3- Prueba que $\mathbb{R}^3$ es generado por $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$

Sea $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ arbitrario

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & c \end{array}\right]$$

$$c_3 = c$$
$$c_2 + c = b \Rightarrow c_2 = b - c$$
$$c_1 + b = a \Rightarrow c_1 = a - b$$

Como existen valores para c_1, c_2, c_3, $\mathbb{R}^3$ es generado por los vectores dados

4- ¿Es $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ generado por $2, 3+x, 2-x^2$?

$\subset$

Evidente

$\supset$

Sea $a+bx+cx^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ arbitrario

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow c_3 = -c \\ \Rightarrow c_2 = b \end{array}$$

$$2c_1 + 3b - 2c = 0$$
$$2c_1 = a - 3b - 2c \Rightarrow c_1 = \frac{a-3b}{2} - c$$

$\therefore$ Sí es generado por los vectores

5- ¿Es $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ generado por $1,\ 2+2x,\ 1-x+x^2,\ 2-x^2+x^3$?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 2 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow$$

Con sol. unicas, se afirma la igualdad

$\therefore$ Si es generado

6- Prueba que $1+x,\ x+x^2$ no generan a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow c_1 = a \\ \\ \rightarrow c_3 = c \end{array}$$

Pero $c_1 + c_2 = b$

$\therefore$ $a + c = b$

Por lo que se generan polinomios del tipo

$a + (a+c)x + cx^2$

Es decir, polinomios como x^2+1 no son generados

$\therefore$ No genera a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Tarea 13: Independencia Lineal

1.-

Fecha de Realización: 13-Noviembre-2019

Ejercicios en Clase 26: Vector de Coordenadas

1.- Si $\beta=\{-1+x+x^2, 1-x+x^2, 1+x-x^2\}$ es base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ obtener $[v]_\beta \ \forall v \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sean $a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ arbitrario y $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ por determinarse tal que

$$c_1(-1+x+x^2)+c_2(1-x+x^2)+c_3(1+x-x^2)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

Por igualdad de polinomios

$$\begin{aligned} -c_1+c_2+c_3&=a_0\\ c_1-c_2+c_3&=a_1\\ c_1+c_2-c_3&=a_2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a_0\\ 1 & -1 & 1 & a_1\\ 1 & 1 & -1 & a_2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0\\ 0 & 0 & 2 & a_0+a_1\\ 0 & 2 & 0 & a_0+a_2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a_0\\ 0 & 2 & 0 & a_0+a_2\\ 0 & 0 & 2 & a_0+a_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3\to R_3]{\frac{1}{2}R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a_0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}a_2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1 \end{array}\right] \Rightarrow [a_0+a_1x+a_2x_2]_\beta = \left[\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_0+a_2}{2}, \frac{a_0+a_1}{2}\right]$$

2.- Ahora con $\beta_1=\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$

Sean $a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ arbitrario y $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ por determinarse tal que

$$c_1(1)+c_2(1+x)+c_3(1+x+x^2)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=a_0 & &\to c_1=a_0-a_1\\ c_2+c_3&=a_1 & &\Rightarrow c_2=a_1-a_2\\ c_3&=a_2 & &\Rightarrow c_3=a_2 \end{aligned}$$

$$[a_0+a_1x+a_2x^2]=[a_0-a_1, a_1-a_2, a_2]$$

Fecha de Realización: 20-Noviembre-2019

Ejercicios en Clase 27: Cambio de Base

Con $\beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Sean $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ arbitraria y $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ por determinarse tales que

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 - c_2 + c_3 + c_4 \\ c_1 + c_2 - c_3 + c_4 & c_1 + c_2 + c_3 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 + R_1 \to R_2 \\ R_4 + R_1 \to R_2}]{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 2 & a+b \\ 0 & 2 & 0 & 2 & a+c \\ 0 & 2 & 2 & 0 & a+d \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2} R_3 \to R_3 \\ \frac{1}{2} R_4 \to R_4}]{\frac{1}{2} R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{a+d}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_3 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{d-c}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{d-c}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - R_3 \to R_4]{R_1 - R_3 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{d-c-b-a}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2} R_4 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c-d}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_4 \to R_3]{R_2 - R_4 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-b+c+d}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+b-c+d}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c-d}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-b-c-d}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-b+c+d}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+b-c+d}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c-d}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{(-1) R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a+b+c+d}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-b+c+d}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+b-c+d}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c-d}{4} \end{array}\right]$$

Entonces:

$$\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{-a+b+c+d}{4} \\ \frac{a-b+c+d}{4} \\ \frac{a+b-c+d}{4} \\ \frac{a+b+c-d}{4} \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Así, $Q = [q_1]_{\beta_2}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Ahora calcular

$P = [\,v\,]_{\beta_1}^{\beta_2} = Q^{-1}$

$P \circ \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_{\beta_2} = \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_{\beta_1}$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pues con

$\beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Tenemos

$$\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{-a+b+c+d}{4} \\ \frac{a-b+c+d}{4} \\ \frac{a+b-c+d}{4} \\ \frac{a+b+c-d}{4} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\right]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{17}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\right]_{\beta_1} = [P]_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\right]_{\beta_2}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-4+2+5 & -4+2+5 \\ 2+5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Fecha de Realización: 25-Noviembre-2019

Ejercicios en Clase 28: Núcleo e Imagen

* 1.- Obtener el núcleo y la imagen de
$T([x,y,z]) = [x, x-y, y+z]$

$\mathrm{Ker}(T) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid T([x,y,z]) = 0\}$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

$= \{[0,0,0]\} = \mathcal{L}\{\emptyset\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T([x,y,z]) \in \mathbb{R}^3 \mid [x,y,z] \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{T([x,y,z]) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{[x, x-y, y+z] \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{[x,x,0] + [0,-y,y] + [0,0,z] \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x[1,1,0] + y[0,-1,1] + z[0,0,1] \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}\{[1,1,0], [0,-1,1] [0,0,1]\} \\ &= \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = \rho(T) = 3 \end{aligned}$$

2.- $T([x,y]) = 3x + 4y$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T) &= \{[x,y] \mid T([x,y]) = 0\} \\ &= \{[x,y] \mid 3x + 4y = 0\} \\ &= \{[x,y] \mid y = -\tfrac{3}{4}x\} \\ &= \{[x, -\tfrac{3}{4}x] \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x[1, -\tfrac{3}{4}] \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}\{[1, -\tfrac{3}{4}]\} \qquad \nu(T) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{[3x+4y] \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{[3x+4y](1) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}\{1\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = \rho(T) = 1 \end{aligned}$$

3.- $T([x,y,z]) = [x,y,0]$

$\mathrm{Ker}(T) \rightarrow T([x,y,z]) = 0$

$\rightarrow T([x,y,z]) = [0,0,0]$

$x = 0$

$y = 0$

$0 = 0$

$\mathrm{Ker}(T) = \{T([x,y,z]) \mid T([x,y,z]) = 0\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Longrightarrow \nu(T) = 1$$

$$\operatorname{Im}(T) = \{ v \in V \mid \exists\, u \in U \cdot \rightarrow \cdot\ T(u) = v \}$$

$$= \{ Ax \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Longrightarrow \rho(T) = 2$$

4.- $\frac{d}{dx}(ax+b) = a \rightarrow D(ax+b) = a$ donde $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{Ker}(T) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a \in \mathbb{R}$
$b = 0$

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Longrightarrow \nu(T) =$$

Fecha de Entrega: 26 - Noviembre - 2019

Tarea 14: Base y Dimensión

1- Determinar si los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{M}_{2x2}$ constituyen una base del espacio

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = V$

Para que V sea base, el conjunto debe generar el espacio y ser L. I.

Comencemos por probar que genera

Para que $V = \mathbb{M}_{2x2}$ debe ocurrir: $\mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2x2} \wedge \mathbb{M}_{2x2} \subset \mathcal{L}\{V\}$

$\mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2x2}$:

Claramente

$V \subset \mathbb{M}_{2x2}$

Entonces

$\mathcal{L}\{V\} \subset \mathcal{L}\{\mathbb{M}_{2x2}\}$

$\rightarrow \mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2x2}$

$\therefore \mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2x2}$

$\mathbb{M}_{2x2} \subset \mathcal{L}\{V\}$:

Sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ arbitraria de $\mathbb{M}_{2x2}$ y $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ por determinarse tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 + c_4 \\ c_3 + c_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \rightarrow$$

$c_4 = d$

$c_3 = c - d$

$c_2 = b - c$

$c_1 = a - b$

Como c_1, c_2, c_3, c_4 tiene valores reales, el conjunto sí genera al espacio en cuestión

Ahora probemos independencia lineal, usando la ecuación anterior:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con manipulación algebraica, sustituimos $a = b = c = d = 0$

$\rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

$\therefore$ Es L. I.

$\therefore$ V es base para $\mathbb{M}_{2x2}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\} = V$

Para que V sea base de $\mathbb{M}_{2\times2}$ debe cumplirse que genere a $\mathbb{M}_{2\times2}$ y que sea L.I.

Para que genere a $\mathbb{M}_{2\times2}$ debe cumplirse [illegible]

$\mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2\times2}$:

$V \subset \mathbb{M}_{2\times2}$

$\rightarrow \mathcal{L}\{V\} \subset \mathcal{L}\{\mathbb{M}_{2\times2}\}$

$= \mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2\times2}$

$\therefore \mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{M}_{2\times2}$

$\mathbb{M}_{2\times2} \subset \mathcal{L}\{V\}$

Sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times2}$ arbitrario y $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + c_3 + 2c_4 &= a \\ c_1 + 3c_2 - c_3 + 3c_4 &= b \\ 3c_1 + c_3 - c_4 &= c \\ 2c_1 + c_2 - c_3 + 2c_4 &= d \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & -1 & 3 & b \\ 3 & 0 & 1 & -1 & c \\ 2 & 1 & -1 & 2 & d \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-20) + 1(0) + 1\cdot(18) + 1\cdot(-26) + 1\cdot(-20)$$

$$= -20 + 18 - 26 - 20 \neq 0$$

$\therefore$ Genera un espacio y en el s. homogéneo asociado obtendremos 0, entonces sí es base para $\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

2- Determinar si los siguientes conjuntos de vectores constituyen una base para el espacio indicado

a) $\{[3,-2],[4,5]\}, \mathbb{R}^2$

Para que V sea base de $\mathbb{R}^2$ debe generarlo y ser L.I.

Generar: $\mathcal{L}\{[3,-2],[4,5]\} = \mathbb{R}^2$

$\subset$

Claramente $\{[3,-2],[4,5]\} \subset \mathbb{R}^2$

$\rightarrow \mathcal{L}\{[3,-2],[4,5]\} \subset \mathcal{L}\,\mathbb{R}^2$

$= \mathcal{L}\{[3,-2],[4,5]\} \subset \mathbb{R}^2$

$\therefore \mathcal{L}\{[3,-2],[4,5]\} \subset \mathbb{R}^2$

$\supset$

Sea $a \in \mathbb{R}^2$ arbitrario donde $a = [x_1, x_2]$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$[x_1, x_2] = c_1[3,-2] + c_2[4,5]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & x_1 \\ 4 & 5 & x_2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & x_1 \\ 1 & 7 & x_2 - x_1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -23 & 4x_1 - 3x_2 \\ 1 & 7 & x_2 - x_1 \end{array}\right]$$

así:

$$c_1 + 7c_2 = x_2 - x_1$$
$$-23c_2 = 4x_1 - 3x_2$$
$$c_2 = \frac{3x_2 - 4x_1}{23} \Rightarrow c_1 = x_2 - x_1 - \frac{21x_2 + 28x_1}{23}$$
$$c_1 = \frac{2x_2}{23} + \frac{5x_1}{23}$$

Como c_1, c_2 tienen soluciones reales, el conjunto genera un espacio y si se trabaja el sistema homogeneo asociado del anterior, obtenemos que $c_1 = c_2 = 0$ $\therefore$ son L. I.
$\therefore$ El conjunto si es base para $\mathbb{R}^2$

b) $\{[2,1,0],[0,-1,1]\}$, $\mathbb{R}^3$

Para que V sea base de $\mathbb{R}^3$ debe generarlo y ser L. I.

Para que genere $\mathcal{L}\{V\} = \mathbb{R}^3$

$\subset$

Claramente $\{[2,1,0][0,-1,1]\} \subset \mathbb{R}^3$
$\rightarrow \mathcal{L}\{[2,1,0],[0,-1,1]\} \subset \mathcal{L}\{\mathbb{R}^3\}$
$\therefore \mathcal{L}\{[2,1,0],[0,-1,1]\} \subset \mathbb{R}^3$

$\supset$

Con $[a,b,c]$ arbitrario de $\mathbb{R}^3$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que
$c_1[2,1,0] + c_2[0,-1,1] = [a,b,c]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & a-2b \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_3 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a-2b-2c \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

Así:
$$c_1 - c_2 = b$$
$$c_2 = c$$
$$0 = a - 2b - 2c$$

Gracias a la última ecuación, vemos que no tiene solución
$\therefore$ No genera
$\therefore$ No es base

3.- Determinar si los siguientes conjuntos de vectores constituyen una base para $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

a) $\{x^3 - 2x^2 + 1, x^2 - 4, x^3 + 2x, 5x\} = V$

Deben generar y ser L. I.

Que genera

$\subset$

$V \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$
$\rightarrow \mathcal{L}\{V\} \subset \mathcal{L}\{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$
$\therefore \mathcal{L}\{V) \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$\supset$

Saltando a la matiz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 5 & c \\ 1 & -4 & 0 & 0 & d \end{array}\right]$$ Su determinante es -35

$\therefore$ Si hay soluciones reales para c_1, c_2, c_3, c_4

$\therefore$ Si genera

Y cuando a, b, c, d toman el valor 0 (para probar si son L.I.), $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

$\therefore$ Són L.I.

$\therefore$ Sí es una base

b) $\{x^3-1, 2x^2, x+3, 5+2x+2x^2+x^3\} = V$

Deben generar y ser L. I.

Que genera

$\subset$

$V \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$\rightarrow \mathcal{L}\{V\} \subset \mathcal{L}\{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$\therefore \mathcal{L}\{V\} \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$\supset$

Saltando a la matiz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2 & c \\ -1 & 3 & 3 & 5 & d \end{array}\right]$$ Su determinante es 0

Por lo que puede que genere o no el espacio, sin embargo en el sistema homogéneo asociado, trae soluciones infinitas y no 0

$\therefore$ No son L.I.

$\therefore$ No es base

4.- Para cada subespacio determinar una base y la dimensión de dicho subespacio

a) $$\left\{ \begin{bmatrix} x-2y \\ x+y \\ 3y \end{bmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Lo anterior es

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ 3y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{una C.L.}]{\text{Y como es}} \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} \text{ es la base}$$

Y su dimensión es 2

$-1-2(-2)$
$-1+4$

b) $\{[x,y,z,w] \mid x+y+z+w=0\}$

Lo anterior es

$[x,y,z,-x-y-z]$
$=[x,0,0,-x]+[0,y,0,-y]+[0,0,z,-z]$
$=x[1,0,0,-1]+y[0,1,0,-1]+z[0,0,1,-1]$ y como es una C.L.
$=\mathcal{L}\{[1,0,0,-1],[0,1,0,-1],[0,0,1,-1]\}$

c) $\{[x,y,z] \mid x-3y+z=0,\ y-2z=0,\ 2y-z=0\}$

Lo anterior es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{array}$$

Así: $S=\{[0,0,0]\}$
Con dimensión $=1$

5.- Determinar la dimensión de $\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \end{bmatrix}\right\}$

Claramente $-2\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ y $-3\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 15 \end{bmatrix}$

$\therefore \dim(V)=1$

6.- Determinar la dimensión de $\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+2R_1\to R_3 \\ R_4-5R_1\to R_4}]{R_2-3R_1\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$ Este es C.L.

$\therefore \dim(V)=3$

Fecha de Entrega: 02-Diciembre-2019

Tarea 15: Espacio Renglón, Espacio Columna, Rango y Nulidad de una matri

1.- Determinar N_A, C_A, $\rho(A)$, $\nu(A)$ si

a)
$$A=\begin{bmatrix}7&-3&5\\-4&1&-5\\-5&2&-4\end{bmatrix}$$

N_A:
$$\left[\begin{array}{ccc|c}7&-3&5&0\\-4&1&-5&0\\-5&2&-4&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+\frac{5}{7}R_1\to R_3]{R_2+\frac{4}{7}R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}7&-3&5&0\\0&-\frac{5}{7}&-\frac{15}{7}&0\\0&-\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-5R_3\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}7&-3&5&0\\0&0&0&0\\0&-\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}&0\end{array}\right]$$

Así
$$7x_1-3x_2+5x_3=0$$
$$-\frac{x_2}{7}-\frac{3x_3}{7}=0 \Rightarrow x_2-3x_3=0 \Rightarrow x_2=3x_3$$
$$7x_1-9x_3+5x_3=0 \Rightarrow 7x_1=4x_3 \Rightarrow x_1=\frac{4}{7}x_3$$

Así
$$S=\left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{7}x_3\\3x_3\\x_3\end{bmatrix}\middle|\ x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_3\begin{bmatrix}\frac{4}{7}\\3\\1\end{bmatrix}\middle|\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\therefore N_A=\mathcal{L}\{[\tfrac{4}{7},3,1]\}$$

C_A:
$$\begin{bmatrix}7&-4&-5\\-3&1&2\\5&-5&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-\frac{5}{7}R_1\to R_3]{R_2+\frac{3}{7}R_1\to R_2}\begin{bmatrix}7&-4&-5\\0&-\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\0&-\frac{15}{7}&-\frac{3}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-3R_2\to R_3}\begin{bmatrix}7&-4&-5\\0&-\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\0&0&0\end{bmatrix}\to \text{L.D.}$$

$$\therefore C_A=\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}7\\-4\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$\rho(A)$: $\therefore \rho(A)=2$

$\nu(A)$: $\therefore \nu(A)=1$

b)
$$A=\begin{bmatrix}2&6&4\\-3&2&5\\-5&-4&1\end{bmatrix}$$

N_A:
$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&6&4&0\\-3&2&5&0\\-5&-4&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+\frac{5}{2}R_1\to R_3]{R_2+\frac{3}{2}R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}2&6&4&0\\0&11&11&0\\0&11&11&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}2&6&4&0\\0&11&11&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Entonces
$$x_2=-x_3$$
$$2x_1-6x_3+4x_3=0 \Rightarrow 2x_1=2x_3$$
$$S=\{[x_3,-x_3,x_3]\mid x_3\in\mathbb{R}\}$$

$$\therefore N_A=\mathcal{L}\{[1,-1,1]\}$$

$$C_A: \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 6 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1 \to R_3]{R_2-3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 11 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{L.D.}$$

$\therefore C_A = \mathcal{L}\{[2,-3,-5],[6,2,-4]\}$

$\rho(A): 2$

$\nu(A): 1$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$N_A:$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$

$x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$

$x_2 = -3x_3 + 2x_4$

$x_1 = 2x_3 - 4x_4$

$S = \{[2x_3 - 4x_4, -3x_3 + 2x_4, x_3, x_4] \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$\therefore N_A = \mathcal{L}\{[2,-3,1,0],[-4,2,0,1]\}$

$$C_A: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4+2R_2 \to R_4]{R_3-3R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-4R_1 \to R_4]{R_3+2R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}\text{L.D.}$$

$\therefore C_A = \mathcal{L}\{[1,0],[2,1]\}$

$\rho(A): 2$

$\nu(A): 2$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$N_A:$ $x_1 - 4x_2 \quad 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2 - 2x_4$

$x_3 - 5x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 5x_4$

$2x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 0$

$S = \{[4x_2 - 2x_4, x_2, 5x_4, x_4, 0]\}$

$\therefore N_A = \mathcal{L}\{[4,1,0,0,0],[-2,0,5,1,0]\}$

C_A: Vemos fácilmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow \text{L.D. de } R_1 \\ \\ \Rightarrow \text{L.D. de } R_1 \text{ y } R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$\therefore C_A = \mathcal{L}\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,2]\}$

$\rho(A): 3$

$\nu(A): 2$

e) $A = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

N_A: Reacomodando un poco:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ 10 & -8 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-10R_1 \to R_3]{R_2-R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -18 & -2 & 18 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+9R_4 \to R_3]{R_2+R_4 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 0$

$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_4$

$x_1 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4$

$\therefore N_A = \mathcal{L}\{[1,1,0,1]\}$

$$C_A: \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-4R_4 \to R_2]{\substack{R_1+5R_4 \to R_1 \\ R_3-R_4 \to R_3}} \begin{bmatrix} 0 & -10 & 1 & -19 \\ 0 & 10 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 0 & -10 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{C.L}$$

$\therefore C_A = \mathcal{L}\{[10,0,1,1],[-2,2,6,0],[-2,-2,0,-2]\}$

$\rho(A): 3$

$\nu(A): 1$

f) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

N_A: $x_2 = -x_3$ $\quad x_1 = -x_3$

$\therefore N_A = \mathcal{L}\{[-1,-1,1]\}$

C_A: $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + \frac{3}{2}R_2 \to R_3]{R_1 + \frac{5}{2}R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & \frac{25}{2} \\ -2 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & \frac{25}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore C_A = \mathcal{L}\{[-2, 0, -2, 7], [3, -1, -2, 2]\}$

$\rho(A)$: 2

$\nu(A)$: 1

g) $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \\ -9 & 6 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

N_A: $-3x_1 + 2x_2 = 0$

$\frac{2x_2}{3} = x_1$

$\therefore N_A = \mathcal{L}\{[\frac{2}{3}, 1]\}$

C_A: $C_A = \mathcal{L}\{[-3, 2]\}$

$\rho(A)$: 1

$\nu(A)$: 1

$c-2b+2a-6b \quad 2a-8b+c$

Fecha de Entrega: 02-Diciembre-2019

Tarea 16: Cambio de Base

1- Considera el conjunto $\beta = \{[3,1,2],[-1,0,2],[4,3,5]\} \subset \mathbb{R}^3$

i) Demuestra que β es base para $\mathbb{R}^3$

Para $[a,b,c]$ arbitrario

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & a \\ 1 & 0 & 3 & b \\ 2 & 2 & 5 & c \end{array}\right] \to \text{Su determinante} \neq 0$$

Por lo que hay valores para c_1, c_2, c_3 reales que generan a $[a,b,c]$ arbitrario (es decir, a $\mathbb{R}^3$) y en el caso particular donde $a=b=c=0$, la solución del sistema homogéneo asociado es $c_1=c_2=c_3=0$, lo que prueba que son L. I.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & b \\ 2 & 2 & 5 & c \\ 3 & -1 & 4 & a \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 2 & -1 & c-2b \\ 0 & -1 & -5 & a-3b \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & -11 & 2a-8b+c \\ 0 & -1 & -5 & a-3b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{11}R_2\to R_2]{-R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2a+8b-c}{11} \\ 0 & 1 & 5 & 3b-a \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-5R_2\to R_3]{R_1-3R_2\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{6a-13b+3c}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2a+8b-c}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a-7b+5c}{11} \end{array}\right] \Bigg\} \text{Se comprueba}$$

ii) Determinar $[[1,1,1]]_\beta$, $[[3,4,6]]_\beta$

$$[[1,1,1]]_\beta = \begin{bmatrix} -\frac{4}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ \frac{5}{11} \end{bmatrix} \qquad [[3,4,6]]_\beta = \begin{bmatrix} -\frac{16}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} \end{bmatrix}$$

iii) Determinar $[[x,y,z]]_\beta \; \forall [x,y,z] \in \mathbb{R}^3$

$$[[x,y,z]]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{6x-13y+3z}{11} \\ \frac{-x-7y+5z}{11} \\ \frac{-2x+8y-z}{11} \end{bmatrix}$$

2- Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, suponga que $[1+x]_\beta = [2,1,0]$, $[2-x+x^2]_\beta = [1,1,1]$, $[x-x^2]_\beta = [-1,3,2]$. Determinar los vectores de la base β

$$\begin{aligned} 1+x &= 2v_1+v_2 \\ 2-x+x^2 &= v_1+v_2+v_3 \\ x-x^2 &= -v_1+3v_2+2v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+x &= 2a_1+2b_1x+2c_1x^2+a_2+b_2x+c_2x^2 \\ 2-x+x^2 &= a_1+b_1x+c_1x^2+a_2+b_2x+c_2x^2+a_3+b_3x+c_3x^2 \\ x-x^2 &= -a_1-b_1x-c_1x^2+3a_2+3b_2x+3c_2x^2+2a_3+2b_3x+2c_3x \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 + 0 = 1 \\ c_1 + 0 + 0 = 3 \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} c_3 + c_2 + c_1 = 1 \\ 0 + c_2 + c_1 = 1 \\ 0 + 0 + c_1 = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + x &= 2a_1 + 2b_1x + 2c_1x^2 + a_2 + b_2x + c_2x^2 \\ 2 - x + x^2 &= a_1 + b_1x + c_1x^2 + a_2 + b_2x + c_2x^2 + a_3 + b_3x + c_3x^2 \\ -x - x^2 &= -a_1 - b_1x - c_1x^2 + 3a_2 + 3b_2x + 3c_2x^2 + 2a_3 + 2b_3x + 2c_3x^2 \end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\begin{matrix} 1 = 2a_1 + a_2 \\ 2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 = -a_1 + 3a_2 + 2a_3 \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 2b_1x + b_2x \\ -x = b_1x + b_2x + b_3x \\ x = -b_1x + 3b_2x + 2b_3x \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} b_1 = -\frac{2}{5} \\ b_2 = \frac{9}{5} \\ b_3 = -\frac{12}{5} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0x^2 = 2c_1x^2 + c_2x^2 \\ x^2 = c_1x^2 + c_2x^2 + c_3x^2 \\ -x^2 = -c_1x^2 + 3c_2x^2 + 2c_3x^2 \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = \frac{3}{5} \\ c_2 = -\frac{6}{5} \\ c_3 = \frac{8}{5} \end{matrix}$$

Encontramos que: $v_1 = 1 - \frac{2x}{5} + \frac{3x^2}{5}$

$v_2 = -1 + \frac{9x}{5} - \frac{6x^2}{5}$

$v_3 = 2 - \frac{12x}{5} + \frac{8x^2}{5}$

Entonces $\beta = \left\{ 1 - \frac{2x}{5} + \frac{3x^2}{5}, -1 + \frac{9x}{5} - \frac{6x^2}{5}, 2 - \frac{12x}{5} + \frac{8x^2}{5} \right\}$

3.- En $\mathbb{R}^3$ considere las dos bases $\beta_1 = \{[1,1,1], [1,1,0], [1,0,0]\}$,
$\beta_2 = \{[2,1,2], [1,0,3], [-1,4,-2]\}$

i) Determinar $[[1,1,3]]_{\beta_1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \end{array}\right] \quad \begin{matrix} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow [[1,1,3]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii) Determinar $[[1,1,3]]_{\beta_2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ c_2 & c_1 & c_3 & \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 4R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{17}R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{17} \end{array}\right]$$

$c_3 = \frac{4}{17}$ $\quad c_1 = \frac{1}{17}$ $\quad c_2 = \frac{19}{17}$

$$[[1,1,3]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} \\ \frac{19}{17} \\ \frac{4}{17} \end{bmatrix}$$

iii) Determinar la matiz de cambio de base de β_1 a β_2

$$[[x,y,z]]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}\frac{12x+y-4z}{17}\\ \frac{-10x+2y+9z}{17}\\ \frac{-3x+4y+z}{17}\end{bmatrix}$$

Con la "fórmula" anterior:

$$[[1,1,1]]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}\frac{9}{17}\\ \frac{1}{17}\\ \frac{2}{17}\end{bmatrix},\ [[1,1,0]]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}\frac{13}{17}\\ -\frac{8}{17}\\ \frac{1}{17}\end{bmatrix},\ [[1,0,0]]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}\frac{12}{17}\\ -\frac{10}{17}\\ -\frac{3}{17}\end{bmatrix}$$

Así $\quad Q=[q_1]^{\beta_1}_{\beta_2}=\begin{bmatrix}\frac{9}{17} & \frac{13}{17} & \frac{12}{17}\\ \frac{1}{17} & -\frac{8}{17} & -\frac{10}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{1}{17} & -\frac{3}{17}\end{bmatrix}$

iv) Determinar la matriz de cambio de base de β_2 a β_1

$P=[p]^{\beta_2}_{\beta_1}=Q^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{9}{17} & \frac{13}{17} & \frac{12}{17} & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{17} & -\frac{8}{17} & -\frac{10}{17} & 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{17} & \frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -5\end{array}\right]$$

$$P=[p]^{\beta_2}_{\beta_1}=Q^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & -3 & 6\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

v) Obtener los resultados dados en los incisos i, ii utilizando los incisos iii, iv

Obteniendo ii) con iii)

$$[[1,1,3]]_{\beta_2}=[q_1]^{\beta_1}_{\beta_2}[[1,1,3]]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}\frac{9}{17} & \frac{13}{17} & \frac{12}{17}\\ \frac{1}{17} & -\frac{8}{17} & -\frac{10}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{1}{17} & -\frac{3}{17}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{17}\\ \frac{19}{17}\\ \frac{4}{17}\end{bmatrix}$$

Obteniendo i) de iv)

$$[[1,1,3]]_{\beta_1} = [\varphi]_{\beta_1}^{\beta_2}\,[[1,1,3]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{17} \\ \frac{19}{17} \\ \frac{4}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.- En $\mathbb{R}^4$ considere las dos bases:

$\beta_1 = \{[1,0,0,0], [0,1,0,0] [0,0,1,0], [0,0,0,1]\}$

$\beta_2 = \{[1,0,0,0], [2,2,0,0], [3,3,3,0], [4,4,4,4]\}$

i) Determinar la matiiz de cambio de base de β_2 a β_1

Hagamos $[[x,y,z,w]]_{\beta_1}$

$$[[x,y,z,w]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Para hacer la matiiz de cambio de base;

$$[[1,0,0,0]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [[2,2,0,0]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [[3,3,3,0]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} [[4,4,4,4]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Así, la matiiz de cambio de base de β_2 a β_1 es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ii) Determinar la matiiz de cambio de base de β_1 a β_2

La obtenemos por la ecuación que lleva

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & x \\ 0 & 2 & 3 & 4 & y \\ 0 & 0 & 3 & 4 & z \\ 0 & 0 & 0 & 4 & w \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = x-y \\ c_2 = \frac{y-z}{2} \\ c_3 = \frac{z-w}{3} \\ c_4 = \frac{w}{4} \end{array} \Rightarrow [[x,y,z,w]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} x-y \\ \frac{y-z}{2} \\ \frac{z-w}{3} \\ \frac{w}{4} \end{bmatrix}$$

Para hacer la matiiz de cambio de base de β_1 a β_2 es

$$[[1,0,0,0]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [[0,1,0,0]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [[0,0,1,0]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, [[0,0,0,1]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Así, la matiiz es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

iii) Utilizar la matriz obtenida en el inciso anterior para determinar las coordenadas de un vector cualesquiera $[a,b,c,d]$ en términos de β_2

$$[[a,b,c,d]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \\ \frac{c}{3} - \frac{d}{3} \\ \frac{d}{4} \end{bmatrix}$$

5- Sea V un espacio vectorial de dimensión 4, considera las bases: $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\beta_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ donde

$$\begin{aligned} u_1 &= 3v_1 \phantom{{}+6v_2} + 5v_3 + 2v_4 \\ u_2 &= 3v_1 + 6v_2 + 4v_3 + 3v_4 \\ u_3 &= -4v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4 \\ u_4 &= -3v_1 + v_2 + v_3 + 2v_4 \end{aligned}$$

obtener $[p]_{\beta_1}^{\beta_2}$

Analicemos

$$[v_1]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, [v_2]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, [v_3]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [v_4]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Así

$$Q = [q]_{\beta_2}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

y $[p]_{\beta_1}^{\beta_2} = Q^{-1}$ que es

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{353} & -\frac{41}{353} & \frac{78}{353} & -\frac{29}{353} \\ -\frac{3}{353} & \frac{68}{353} & \frac{17}{353} & -\frac{38}{353} \\ -\frac{41}{353} & -\frac{12}{353} & -\frac{3}{353} & \frac{69}{353} \\ \frac{59}{353} & -\frac{43}{353} & -\frac{99}{353} & \frac{159}{353} \end{bmatrix}$$

Fecha de Realización: 02-Diciembre-2019

Ejercicios en Clase 29: Matriz Asociada a una Transformación Lineal

1.-

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$[x,y,z] \mapsto \begin{bmatrix} x+2y+z \\ 2x-y \\ 2y-z \end{bmatrix}$

$\beta_1 = \{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$

$\beta_2 = \{[1,0,1], [0,1,1], [0,0,1]\}$

$$\begin{tikzcd} \overset{\beta_1}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "{[T]_{\beta_1}}"] & \overset{\beta_1}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "{[P]^{\beta_1}_{\beta_2}}"] \\ \underset{\beta_2}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "{[q]^{\beta_2}_{\beta_1}}"] \arrow[r, "{[T]_{\beta_2}=?}"'] \arrow[r, bend left=80] & \underset{\beta_2}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

$[T]_{\beta_2} = [P]^{\beta_1}_{\beta_2} [T]_{\beta_1} [q]^{\beta_2}_{\beta_1}$

Determinar $[T]_{\beta 2}$

$[[x,y,z]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \to [T(1,0,0)]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \to [T(0,1,0)]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \to [T(0,0,1)]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$[T]^{\beta_1}_{\beta_1} = [T]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "{[T]_{\beta_1}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "{[p]^{\beta_1}_{\beta_2} = P}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "{[q]^{\beta_2}_{\beta_1} = Q}"] \arrow[r, "{[T]_{\beta_2}}"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

← Diagrama Topológico

Por tanto:

$$[T]_{\beta_2} = [p]^{\beta_1}_{\beta_2} [T]_{\beta_1} [q]^{\beta_2}_{\beta_1}$$

← Orden de izq a der

Continuando

$$[[1,0,1]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [[0,1,1]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [[0,0,1]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [q]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bajo algo de manipulación algebraica

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Comprobemos con el vector $[5, 4, -7]$

Bajo manipulación algebraica

$$[[5,4,-7]]_{\beta_2} = [p]_{\beta_2}^{\beta_1} [[5,4,-7]]_{\beta_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$[T(5,4,-7)]_{\beta_2} = [T]_{\beta_2} [[5,4,-7]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Que da: $T([5,4,-7]) = 6[1,0,1] + 6[0,1,1] + 3[0,0,1]$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Y vemos que

$$T([5,4,-7]) = \begin{bmatrix} 5 + 2(4) - 7 \\ 2(5) - 4 \\ 2(4) - (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

2.- $T\underset{\beta_1}{(a_0 + a_1 x)} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \end{bmatrix}_{\beta_2}$ $\beta_1 = \{1, x\}$, $\beta_2 = \{[1,0],[0,1]\}$

$\beta_1' = \{1 + x, 1 - x\}$ $\beta_2' = \{[1,0],[2,1]\}$

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \xrightarrow[{[T]^{\beta_1}_{\beta_2}}]{} \mathbb{R}^2$$

Vemos que $[[x,y]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Luego $T(1) = T(1 + 0x) = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} \to [T(1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(x) = T(0 + (1)x) = \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} \to [T(x)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto:

$$[T]^{\beta_1}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\overset{\beta_1}{\mathbb{P}_1(\mathbb{R})} \arrow[r, "{[T]^{\beta_1}_{\beta_2}}"'] & \overset{\beta_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "{P = [p_{ij}]^{\beta_2}_{\beta_2'}}"] \\
\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \arrow[u, "{Q = [q_{ij}]^{\beta_1'}_{\beta_1}}"] \arrow[r, "{[T]^{\beta_1'}_{\beta_2'}}"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ Queremos obtener este

Así que obtenemos Q

$[1 + x]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[1 - x]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ahora sólo nos falta P, por lo que procedemos

Sean $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ arbitrario y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (por determinarse) tal que

$[x,y] = c_1[1,0] + c_2[2,1]$

$\to [x,y] = [c_1 + 2c_2, c_2]$

Así que

$$\begin{matrix} c_1 + 2c_2 = x \\ c_2 = y \end{matrix} \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} c_1 = x - 2y \\ c_2 = y \end{matrix} \right.$$

Y como $[[x, y]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ y \end{bmatrix}$

Entonces $[[1,0]]_{\beta_2'} = \begin{bmatrix} 1 - 2(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[[0,1]]_{\beta_2'} = \begin{bmatrix} 0 - 2(1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Del diagrama

$$[T]^{\beta_1'}_{\beta_2'} = [p_{ij}]^{\beta_2}_{\beta_2'} \; [T]^{\beta_1}_{\beta_2} \; [q_{ij}]^{\beta_1'}_{\beta_1}$$

$$[T]^{\beta_1'}_{\beta_2'} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Y ahora comprobando con $[-4, 7]$

Decimos que

Fecha de Entrega: 04-Diciembre-2019

Tarea 17: Transformaciones Lineales

1.- Determinar cuál de las siguientes son T. L.

i) $T(x,y) = 2x+y$

Sean (x_1,y_1), (x_2,y_2) arbitrarios de $\mathbb{R}^2$ (espacio de salida) y $\alpha \in \mathbb{R}$ dado.

Para que T sea una transformación lineal debe cumplirse:

$T(x_1+x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

Vemos que:

$T((x_1,y_1)) = 2x_1+y_1$ $\quad T((x_2,y_2)) = 2x_2+y_2$

$\therefore T((x_1,y_1)) + T((x_2,y_2)) = 2x_1+2x_2+y_1+y_2$

Asimismo

$T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T((x_1+x_2, y_1+y_2)) = 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)$

$= 2x_1+2x_2+y_1+y_2$

Que como vemos, ambas proposiciones llevan al mismo resultado

$\therefore T(x_1+x_2) = T(x_1)+T(x_2)$

$T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

Vemos que:

$T(\alpha(x_1,y_1)) = T((\alpha x_1, \alpha y_1)) = 2\alpha x_1 + \alpha y_1$

Por otro lado

$\alpha T((x_1,y_1)) = \alpha(2x_1+y_1) = 2\alpha x_1 + \alpha y_1$

Ambas proposiciones llevan al mismo resultado

$\therefore T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

∴ Sí es T. L.

ii) $T(x,y) = x$

$T(x_1+x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$\rightarrow T((x_1,y_1)) = x_1$ $\quad T((x_2,y_2)) = x_2$

$T((x_1,y_1)) + T((x_2,y_2)) = x_1+x_2$

Ahora $T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T((x_1+x_2, y_1+y_2)) = x_1+x_2$

$\therefore T(x_1+x_2) = T(x_1)+T(x_2)$

$T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

$\rightarrow T((\alpha x_1, \alpha y_1)) = \alpha x_1$

$\alpha T((x_1,y_1)) = \alpha(x_1) = \alpha x_1$

$\therefore T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

∴ Sí es T. L.

iii) $T(x,y) = 1$

$T((x_1,y_1)) = 1$ $\quad T((x_2,y_2)) = 1$

$T((x_1,y_1)) + T((x_2,y_2)) = 1+1 = 2$

$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = 1$

$1 \neq 2$

$\therefore T(x_1 + x_2) \neq T(x_1) + T(x_2)$

$\therefore$ No es una T.L.

iv) $T(x, y, z) = (x + y + z, 0, 0)$

$T((x_1, y_1, z_1)) = (x_1 + y_1 + z_1, 0, 0)$

$T((x_2, y_2, z_2)) = (x_2 + y_2 + z_2, 0, 0)$ $\Big\}$ Sumados $= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, 0, 0)$

$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, 0, 0)$

$\therefore T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$T(\alpha(x_1, y_1, z_1)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1, 0, 0)$

$\alpha T((x_1, y_1, z_1)) = \alpha(x_1 + y_1 + z_1, 0, 0) = (\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1, 0, 0)$

$\therefore T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

$\therefore$ Sí es T.L.

v) $T(x, y, z) = (x + y + z, 1, 1)$

$T((x_1, y_1, z_1)) = (x_1 + y_1 + z_1, 1, 1)$

$T((x_2, y_2, z_2)) = (x_2 + y_2 + z_2, 1, 1)$ $\Big\}$ Sumados $= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, 2, 2)$

$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, 1, 1)$

$T(x_1 + x_2) \neq T(x_1) + T(x_2)$

$\therefore$ No es T.L.

vi) $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - y - 2z, x + 2y + 3z)$

$T((x_1, y_1, z_1)) = (2x_1 + y_1 - z_1, 3x_1 - y_1 - 2z_1, x_1 + 2y_1 + 3z_1)$

$T((x_2, y_2, z_2)) = (2x_2 + y_2 - z_2, 3x_2 - y_2 - 2z_2, x_2 + 2y_2 + 3z_2)$

$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \Rightarrow$ Por factorización se ve la igualdad

$\therefore T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$T(\alpha(x_1, y_1, z_1)) = \alpha(2x + y - z, 3x - y - 2z, x + 2y + 3z)$

$\alpha T((x_1, y_1, z_1)) = \alpha(2x + y - z, 3x - y + 2z, x + 2y + 3z)$

$\therefore T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

$\therefore$ Sí es T.L.

vii) $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + 5 + x^2$

Vemos que $T(x_1) + T(x_2) = a_0 + b_0 + 10 + 2x^2$

y $T(x_1 + x_2) = a_0 + b_0 + 5 + x^2$

$\therefore T(x_1) + T(x_2) \neq T(x_1 + x_2)$

$\therefore$ No es T.L.

viii) $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1) + (a_0 + a_2)x + a_2 x^2 + (a_1 + a_2)x^3$

$T(x_1) + T(x_2) = (a_0 + b_0 + a_1 + b_1) + (a_0 + b_0 + a_2 + b_2)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)x^3$

$T(x_1 + x_2) = (a_0 + b_0 + a_1 + b_1) + (a_0 + b_0 + a_2 + b_2)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)x^3$

$\therefore T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$T(\alpha x_1) = \alpha [(a_0 + a_1) + (a_0 + a_2)x + a_2 x^2 + (a_1 + a_2)x^3]$

$\alpha T(x_1) = \alpha [(a_0 + a_1) + (a_0 + a_2)x + a_2 x^2 + (a_1 + a_2)x^3]$

$\therefore T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

$\therefore$ Sí es T.L.

ix) $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) x^3$

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1) = (x_{10} + x_{11} + x_{12}) x^3 \\ T(x_2) = (x_{20} + x_{21} + x_{22}) x^3 \end{array}\right\} \text{Sumados} = (x_{10} + x_{20} + x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}) x^3$$

$T(x_1 + x_2) = (x_{10} + x_{20} + x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{21}) x^3$

$\therefore T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$T(\alpha x_1) = (\alpha x_{10} + \alpha x_{11} + \alpha x_{12}) x^3$

$\alpha T(x_1) = (\alpha x_{10} + \alpha x_{11} + \alpha x_{12}) x^3$

$\therefore T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

$\therefore$ Sí es T.L.

2.- Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ una T.L. tal que
$T([1,1,1]) = 1 - x + x^2$
$T([2,0,0]) = 3 + x - x^2$
$T([0,4,5]) = 2 + 3x - x^2$ calcular

a) $T([2,4,-2])$

Como $[2,4,-2] = 28[1,1,1] - 13[2,0,0] - 6[0,4,5]$

podemos hacer $28(1 - x + x^2) - 13(3 + x - x^2) - 6(2 + 3x - x^2)$

$= 28 - 28x + x^2 - 39 - 13x + 13x^2 - 12 - 18x + 6x^2$

$= -23 - 59x + 20x^2$

$= 20x^2 - 59x - 23$

b) $T([x, y, z])$

Fecha de Entrega: 04-Diciembre-2019

Tarea 18: Núcleo e Imagen de una T.L.

1- Para cada T.L. determinar una base para su núcleo e imagen, verificar el teorema de la dimensión

i) $T(x,y) = [x+y, y-x]$

$Ker(T) = \{(x,y) \mid T((x,y)) = 0\}$

$$x+y = 0 \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$-x+y = 0$$

$x = y = 0$

$= \{(0,0)\} = \mathcal{L}\{\emptyset\} \Rightarrow \dim(Ker(T)) = 0$

$Im(T) = \{T(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{[x+y, y-y] \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{[x,-x] + [y,y] \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{x[1,-1] + y[1,1] \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \mathcal{L}\{[1,-1],[1,1]\} \Rightarrow \dim(Im(T)) = 2 \rightarrow$ El teorema cumple
$= \mathbb{R}^2$

ii) $T(x,y,z) = [x+y-5z, x+3y+7z]$

$Ker(T) = \{(x,y,z) \mid T(x,y,z) = 0\}$
$= \{(x,y,z) \mid x+y-5z = 0, x+3y+7z = 0\}$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-5z = 0 \\ x+3y+7z = 0 \end{array}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

Así
$x + y - 5z = 0$
$2y + 12z = 0 \Rightarrow y = -6z$
$x - 11z = 0 \Rightarrow x = 11z$

$= \{(11z, -6z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
$= \mathcal{L}\{(11,-6,1)\} \Rightarrow \dim(Ker(T)) = 1$

$Im(T) = \{T(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$
$= \{[x+y-5z, x+3y+7z] \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$
$= \{[x,x] + [y,3y] + [-5z,7z] \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$
$= \{x[1,1] + y[1,3] + z[-5,7] \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Pero veamos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+5R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-6R_2\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{L.D.}$$

Entonces $= \mathcal{L}\{[1,1],[1,3]\} \Rightarrow \dim(Im(T)) = 2$

El teorema de la dimensión cumple porque la suma de la dimensión del núcleo y la imagen dan la dimensión del espacio de salida (que es $\mathbb{R}^3$ y su dimensión es 3)

iii) $T(x,y,z)=[x+y-z,\ 2x+2y+2z]$

$\operatorname{Ker}(T)=\{(x,y,z) \mid T(x,y,z)=0\}$

$=\{(x,y,z) \mid x+y-z=0,\ 2x+2y+2z=0\}$

Entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\2&2&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2+2R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\4&4&0&0\end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} x+y-z&=0\\ 4x+4y&=0 \quad\Rightarrow\quad y=-x\\ x-x-z&=0 \quad\Rightarrow\quad z=0\end{aligned}$$

$=\{(x,-x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$

$=\mathcal{L}\{(1,-1,0)\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(T))=1$

$\operatorname{Im}(T)=\{T(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{[x+y-z,\ 2x+2y+2z] \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{[x,2x]+[y,2y]+[-z,2z] \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\mathcal{L}\{[1,2],[-1,2]\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(T))=2$

El teorema de la dimensión se cumple ($\mathbb{R}^3$ es de dim 3]

iv) $T(x,y)=[x+y,\ 5x-5y,\ 2x-3y]$

$\operatorname{Ker}(T)=\{(x,y) \mid T(x,y)=0\}$

$$\rightarrow \begin{aligned} x+y&=0\\ 5x-5y&=0\\ 2x-3y&=0\end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\5&-5&0\\2&-3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&-2&0\\0&-5&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x+y&=0\\ -2y&=0\end{aligned} \qquad \begin{aligned} x&=0\\ y&=0\end{aligned}$$

$=\{(0,0)\}=\mathcal{L}\{\varnothing\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(T))=0$

$\operatorname{Im}(T)=\{T(x,y)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{[x+y,\ 5x+5y,\ 2x-3y] \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{[y,5x,2x]+[y,5y,-3y] \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\mathcal{L}\{[1,5,2],[1,5,-3]\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(T))=2$

El teorema cumple

v) $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=(a_0+a_1)+a_2x+a_3x^2$

$\operatorname{Ker}(T)=\{(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) \mid T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=0\}$

$=\{(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) \mid a_0+a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0\}$

$=\{(a_0-a_0x+a_2x^2+a_3x^3) \mid a_0,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$

$=\{(a_0,-a_0,0,0) \mid a_0\in\mathbb{R}\}$

$=\mathcal{L}\{(1,-1,0,0)\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(T))=1$

$\operatorname{Im}(T)=\{T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$

$=\{(a_0+a_1)+a_2x+a_3x^2 \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$

$=\mathcal{L}\{1,x,x^2\}=\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(T))=3$

El teorema cumple

vi) $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = 0 \right]$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}\{\emptyset\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$$

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4$$

El teorema de la dimensión cumple

vii) $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \middle| a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\}$$

$a_{33} = -a_{11} - a_{22}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 8$$

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall\, i,j = 1,2,3 \right\}.$$

$$= \{ a_{11} + a_{22} + a_{33} \mid a_{ii} \in \mathbb{R} \ \forall\, i = 1,2,3 \}$$

$$= \mathcal{L}\{1\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$$

El teorema cumple

Fecha de Entrega: 04-Diciembre-2019

Tarea 19: Matriz Asociada a una T. L.

~~1- Determinar la matriz asociado~~

1- Determinar la matriz asociado a las siguientes T. L. respecto a las bases canónicas correspondientes

a) $T([x,y]) = [3x-2y, 5x+y]$

$\beta = \{[1,0], [0,1]\}$

Tenemos:

$T([1,0]) = [3,5] \rightarrow [T([1,0])]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$T([0,1]) = [-2,1] \rightarrow [T([0,1])]_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore [T]_\beta = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $T([x,y]) = [2x+y, x-3y, x, y]$

$\beta_1 = \{[1,0], [0,1]\}$

$\beta_2 = \{[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]\}$

Tenemos:

$T([1,0]) = [2,1,1,0] \rightarrow [T([1,0])]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T([0,1]) = [1,-3,0,1] \rightarrow [T([0,1])]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore [T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $T([a,b]) = a + bx$

$\beta_1 = \{[1,0], [0,1]\}$

$\beta_2 = \{1, x\}$

Tenemos:

$T([1,0]) = 1$ y $T([0,1]) = x$

Evidentemente: $[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$

$\beta_1 = \{1, x, x^2\}$

$\beta_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$

Tenemos

$$T(1) = x \rightarrow [T(1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = x^2 \rightarrow [T(x)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x^2) = x^3 \rightarrow [T(x^2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & c \\ d & a+c \\ b+c & b+d \end{bmatrix}$

Son evidentes las bases

$$\left.\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \therefore [T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+b+c+d$

La transformación de las 4 bases canónicas de $\mathbb{M}_{2x2}$ resulta en 1, por tanto

$$[T]_{\beta_2} = [1, 1, 1, 1]$$

g) $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$$[T]_{\beta c} = [1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]$$

7.- Considera la transformación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A - A^T \end{aligned}$$

Obtener

a) La matriz de transformación respecto a la base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} \\ a_{21} - a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) La matriz de transformación respecto a

$$\beta_1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para facilitar cálculos

$$\left[\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x - y \\ y - z \\ z - w \\ w \end{bmatrix}$$

Ahora

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\left[T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\left[T\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\left[T\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right)\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\left[T\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)\right]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ [T]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3.- Considera la transformación:

$$\begin{aligned}T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})\\ A &\longmapsto BA\end{aligned}$$

donde $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$

Obtener la matriz de la transformación respecto a la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Describe la imagen y el núcleo de la transformación

$$T\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22}\\3a_{11}+6a_{21} & 3a_{12}+6a_{22}\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)&=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}\\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)&=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)&=\begin{bmatrix}2 & 0\\6 & 0\end{bmatrix}\\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)&=\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 6\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\therefore [T]_{\beta}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 2\\3 & 0 & 6 & 0\\0 & 3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$Ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| \, T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}$$

$$\begin{matrix} a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{11} + 6a_{21} = 0 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \therefore a_{11} = -2a_{21}$$

Y como el otro sistema es similar

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2a_{21} & -2a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| \, a_{21}, a_{22} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2a_{21} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2a_{22} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \middle| \, a_{21}, a_{22} = 0 \right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow dim(Ker(T)) = 2$$

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ 3a_{11} + 6a_{21} & 3a_{12} + 6a_{22} \end{bmatrix} \middle| \, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Podemos decir

$$\mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \right\}$$

Eliminando dependientes

$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow dim(Im(T)) = 2$$

Fecha de Entrega: 05-Diciembre-2019

Tarea 20: Cambio de Base (Transformaciones Lineales)

1.- Para la transformación $T: U \rightarrow V$ y bases β_1, β_2 dados

I) Realizar el diagrama de cambio de base

II) Calcular $[T]^{\beta_1}_{\beta_2}$

III) Calcular $[T]_{\beta_2}$

a) $T([x,y]) = [3x-2y, 5x+y]$

$\beta_1 = \{[1,0], [0,1]\}$

$\beta_2 = \{[1,1], [-1,1]\}$

I)

$$\begin{tikzcd}
\overset{\beta_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "{[T]\beta_1}"] \arrow[dr, "{[T]^{\beta_1}_{\beta_2}}"] & \overset{\beta_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "{P=[p_{ij}]^{\beta_1}_{\beta_2}}"] \\
\underset{\beta^2}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "{Q=[q_{ij}]^{\beta_2}_{\beta_1}}"] \arrow[r, "{[T]\beta_2}"'] & \underset{\beta^2}{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

II) $[T]^{\beta_1}_{\beta_2} = [p_{ij}]^{\beta_1}_{\beta_2}\, [T]_{\beta_1}$

Calcularemos $[T]\beta_1$

$T([1,0]) = [3,5] \rightarrow [T([1,0])]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$T([0,1]) = [-2,1] \rightarrow [T([0,1])]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore [T]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos P

Para facilitar cálculos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & b-a \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} c_2 = \frac{b-a}{2} \\ c_1 = \frac{a+b}{2} \end{matrix} \rightarrow [[a,b]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}$$

Así:

$$[[1,0]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [[0,1]]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$[T]^{\beta_1}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Comprobamos con $[18, 30]$

$T[18,30] = [-6, 120]$

$[[18,30]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Y vemos que

$57[1,1] + 63[-1,1] = [-6, 120] \Rightarrow$ La T. L.

Por lo que sí son correctos los cálculos.

III) $[T]_{\beta_2} = [p_{ij}]^{\beta_1}_{\beta_2} [T]_{\beta_1} [q_{ij}]^{\beta_2}_{\beta_1}$

Como P y $[T]_{\beta_1}$ ya los tenemos, procedemos a calcular Q

$$[[1,1]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [[-1,1]]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así:

$$[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $T([x,y]) = [2x+y, x-3y]$

$\beta_1 = \{[1,0], [0,1]\}$

$\beta_2 = \{[1,-1], [-1,1]\}$

Debido a que β_2 no es realmente una base, el ejercicio no puede realizarse

c) $T([x,y]) = [y,x]$

$\beta_1 = \{[1,0], [0,1]\}$

$\beta_2 = \{[1,1], [2,1]\}$

I)

$$\begin{tikzcd}
\overset{\beta_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "{[T]_{\beta_1}}"] \arrow[dr, "{[T]^{\beta_1}_{\beta_2}}"] & \overset{\beta_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "{P = [p_{ij}]^{\beta_1}_{\beta_2}}"] \\
\underset{\beta_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "{Q = [q_{ij}]^{\beta_2}_{\beta_1}}"] \arrow[r, "{[T]_{\beta_2}}"'] & \underset{\beta_2}{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

II) $[T]^{\beta_1}_{\beta_2} = [p_{ij}]^{\beta_1}_{\beta_2} [T]_{\beta_1}$

Calculamos T

$T([1,0]) = [0,1] \Rightarrow [T([1,0])]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T([0,1]) = [1,0] \Rightarrow [T([0,1])]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore [T]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ahora calculamos P

$$\left.\begin{aligned} [[1,1]]_{\beta_2} &= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\ [[2,1]]_{\beta_2} &= \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \end{aligned}\right\} Q = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \therefore \quad P = Q^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Ahora

$$[T]^{\beta_1}_{\beta_2} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

III) $[T]_{\beta_2} = [p_{ij}]^{\beta_1}_{\beta_2} \, [T]_{\beta_1} \, [q_{ij}]^{\beta_2}_{\beta_1}$

Ya tenemos P, T, ahora calculamos Q (que tambien ya tenemos

Entonces

$$[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$