24/08/20

Docente: Aurora Torres Soto
Materia: Optimización Inteligente

Optimización = Capacidad de resolver un problema de la forma más eficiente posible
Nos afrontamos a optimizar de forma cotidiano
- Agricultura: Mejor aprovechamiento de cultivos
- Industria textil: Menor desperdicio de tela
- Fabricación de muebles: Producir un modelo para más ganancia
- Diseñar un recipiente con la menor cantidad de material
- Ingeniería: Diseños como puentes
- Diseño de una sala para maximizar la iluminación
- ...

Proceso de solución
- Entender el problema
  - Qué conozco y qué no conozco
  - Cuáles son los datos
  - Qué condiciones existen
  - Usar la notación adecuado
  - Hacer un bosquejo
- Idear un plan
  - Encontrar conexión entre los datos y lo que desconozco
  - Pensar en problemas parecidos
- Ejecutar plan de solución
  - Verificar cada paso
- Ver hacia atrás
  - Examinar la solución obtenida
  - Verificar resultado
  - ¿Obtener resultado de forma diferente?
  - Usar el método para otros problemas

Es conveniente formular un problema en términos matemáticos y a este se le llamará modelo de optimización

Modelos de optimización
Se caracterizan por tener
- Variables de decisión: Aquello sobre lo que actuaremos
- Restricciones o limitaciones: Reglas para obtener soluciones factibles
- Función objetivo: Lo que queremos maximizar o minimizar

Clasificación de modelos de optimización
a) Naturaleza de los datos
- Deterministicos
- Estocásticos
b) Según la variable tiempo
- Dinámicos
- Estáticos
c) Según los objetivos del problema
- Mono-objetivos
- Multiobjetivos
d) Según la presencia de restricciones
- Irrestricto
- Restringido
e) Atendiendo la linealidad de las funciones
- Problemas lineales
- Problemas no lineales
f) Condición de continuidad
- Problemas de optimización continuos
- Problemas de optimización combinatoria
- Problemas mixtos

Técnicas de solución
a) Métodos exactos
- Cálculo
- Programación matemático
b) Métodos numéricos
c) Métodos aproximados

Conceptos
Teorema de los valores extremos
Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ Debe tener un máximo y un mínimo en el intervalo

Puntos críticos
Son aquellos en los que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida
No todos los puntos críticos son máximos o mínimos

Extremos relativos
En $f(x)$ y un punto $x^* \in D$, se dice que $f(x)$ tiene en x^*
- Un máximo relativo si existe un entorno en el que $f(x^*) \geq f(x)$
- Un mínimo relativo si existe un entorno en el que $f(x^*) \leq f(x)$

• Un extremo relativo si $f(x)$ tiene en x^* un máximo o mínimo relativo

Extremos relativos = óptimos locales

Si f es una función con segunda derivada continua en x^* y $f'(x^*)=0$:
• Si $f''(x^*)>0 \rightarrow$ tiene en x^* un mínimo relativo estricto
• Si $f''(x^*)<0 \rightarrow$ tiene en x^* un máximo relativo estricto

Ejercicios
1- $f(x)=x^3-12x+4$

Puntos críticos $x=-2$ Máximo
$x=2$ Mínimo

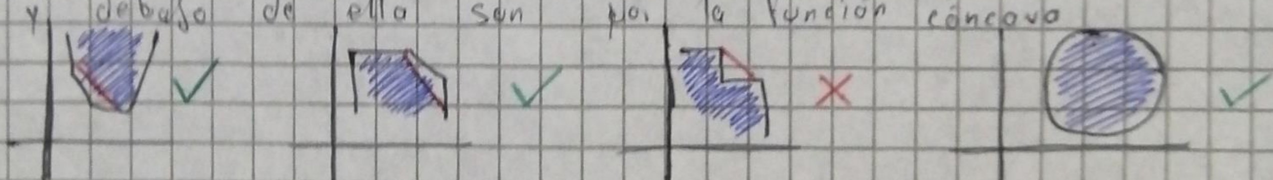
2- $f(x)=\ln(1+x^2)$

Punto crítico $x=0$ $f'(x)$ indefinida

$f''(x)$ también nos permite encontrar la concavidad de una curva
$f''(x)>0$ significa que es convexa
$f''(x)<0$ es cóncava

Usaremos estas técnicas con funciones de varias variables

Conjuntos convexos
Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa, la colección de puntos que se encuentran arriba de la función son por la función convexa y debajo de ella son por la función cóncava



Ello nos permite garantizar la globalidad de los óptimos locales

Funciones de dos variables
Curvas de nivel
Representan la intersección de una función con un plano
Analíticamente se encuentran igualando la función con un valor k
Para diferentes curvas de nivel, debemos variar el valor de k

Puntos críticos

Son aquellos en los que las derivadas parciales valen cero o al menos una de ellas no existe

Se resuelve el sistema de derivadas parciales y se determinan los puntos críticos

Gradiente

Es el vector que se forma con todas las derivadas parciales de una función de varias variables:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

1- Identificar los puntos críticos de la función:

$$f(x,y) = xy - x^3 - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y - 3x^2 \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

$$y - 3x^2 = 0$$
$$x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$$

Luego:

$$y - 3(2y)^2 = 0$$
$$y - 3(4y^2) = 0$$
$$y - 12y^2 = 0$$
$$-12y^2 + y = 0$$
$$y(-12y + 1) = 0$$

$y = 0 \rightarrow x = 0$ $\qquad$ $-12y = -1$

$$y = \frac{1}{12} \rightarrow x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$pc = (0,0)$ $\qquad$ $pc = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$

2- Ahora para la función

$$f(x,y) = 4x^2 + 2y - 2xy - 10y - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 2y - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 - 2x - 10$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x - 2y - 2 \\ -2x - 8 \end{pmatrix}$$

$$8x - 2y - 2 = 0$$
$$-2x - 8 = 0 \Rightarrow -2x = 8$$
$$x = -4$$

$$-34 = 2y$$
$$-17 = y$$

El gradiente evaluado en un punto apunta en la dirección del ascenso más pronunciado

El gradiente de f evaluado en una entrada (x_0, y_0) apunta en la dirección del ascenso más pronunciado

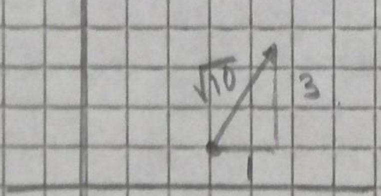
Ejemplo

Para $f(x,y) = xy$ determine la dirección en la que la función crece si estuviéramos en los puntos

al máximo ascenso

a) $P(3,1)$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



← Esta es la dirección

$P(3,-1)$

Como hallamos que $\nabla f = (y, x)$

Entonces ahora tenemos $\nabla f = (-1, 3)$

$P(0,0)$

$$\nabla f = (0,0)$$

Matriz Hessiana

Matriz que empaqueta todas las derivadas parciales de segundo orden de una función

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Clasificación de los puntos críticos

A partir de los puntos críticos (x^*, y^*) evaluamos la matriz Hessiana en ellos y evaluar el signo del determinante

$$|H(x^*, y^*)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x^*, y^*) & f_{xy}(x^*, y^*) \\ f_{yx}(x^*, y^*) & f_{yy}(x^*, y^*) \end{vmatrix}$$

- Si $|H(x^*, y^*)| > 0$ tenemos un extremo relativo
  - Si $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ es un mínimo
  - " " < 0 " " máximo
- Si $|H(x^*, y^*)| < 0$ tenemos un punto de silla
- Si " $= 0$ nos falta información

Identificar y clasificar los p.c. de $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \qquad \text{Como } \nabla f = 0$$

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora hallaremos la Hessiana:

Derivar $-2x$ con respecto de x

Derivar $-2x$ con respecto de y

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$-2y$ Derivar con respecto de x

Derivar con respecto de y a $-2y$

/ /

Ahora evaluamos

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ y obtenemos su determinante

$|Hf| = 4$ ∴ es un extremo relativo

Tomamos y como -2 es menor a cero, es un máximo

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Identificar los p.c. de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$ Como $\nabla f = 0$

$3x^2 - 3y = 0$ $3(x^2 - y) = 0$

$3y^2 - 3x = 0$ $3(y^2 - x) = 0$

$x^2 - y = 0$ $x^2 = y$ $y^4 = y \rightarrow y = 0$

$y^2 - x = 0$ $y^2 = x$ $y = 1$

$x = 0$

$x = 1$

Ahora hallaremos la Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

y evaluamos en cada p.c.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$ ∴ $|Hf| = -9$

De modo que este es un punto de silla.

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$ ∴ $|Hf| = 27$ Es extremo relativo

Como $6 > 0$ tenemos un mínimo

$-9x^3 - 8x^3 = -12$

$x^3(9x^2 - 8) = 12$

Scribe

08/09/20

Ejemplo

Clasificar los pc de

$$f(x,y) = x^2 + y^4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}$$ Igualando a cero

$2x = 0$ $\quad\therefore\quad$ $x = 0$

$4y^3 = 0$ $\quad\quad\quad$ $y = 0$

Ahora hallaremos la Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Y evaluamos

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ y obtenemos su determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Nos falta información}$$

Funciones de más variables

$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ produce una matriz Hessiana de $n \times n$

Menores principales

Se llama menor principal dominante de una matriz M de orden r al determinante de la submatriz formada por las r primeras filas y las r primeras columnas de M

y se denotan por

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ donde n corresponde al orden de la matriz M

$$\Delta_1 = \det(m_{11}) = |m_{11}|$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

$\ldots$

Y analizamos los signos

Si todos los determinantes son positivos tenemos un mínimo relativo

Si son alternativamente $-, +, -, \ldots$ tenemos un máximo relativo

Si todos son diferentes de 0 y no se cumplen los casos anteriores, tenemos un punto de silla

En otro caso, no es concluyente

Veamos

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 2$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4x + 2y \\ -2y + 2x + 2z \\ -6z + 2y \end{pmatrix}$$

Igualamos a 0

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 0 \\ 2y - 6z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ahora hallamos la Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

evaluamos

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|-4| = -4$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -8$$

Como se alternan $- \; + \; -$ es un máximo

Determine y clasifique los pc de

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 2y - x \\ 2z - 2 \end{pmatrix}$$

Igualamos a 0

$$\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ -x + 2y &= 0 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore z = 1$$

$$x = -\frac{2}{3} \qquad y = -\frac{1}{3}$$

Hallamos la Hessiana

$$H f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Evaluamos

$$H f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|2| = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Como todos son minimos, es un minimo

Determine los pc de

$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy + y + 2yz - 3$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 8y - 2x + 1 + 2z \\ 2z + 2y \end{pmatrix}$$

Igualamos a 0

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ -2x + 8y + 2z &= -1 \\ + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{4} \qquad y = -\frac{1}{4} \qquad z = \frac{1}{4}$$

Hallamos la Hessiana

$$H f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

10 / 09 / 20

Multiplicadores de Lagrange

Integra nuevas variables pero en combinación con las restricciones
Permite encontrar el máximo o mínimo con restricciones
Hay que buscar curvas de nivel tangenciales
Son puntos en donde las curvas de nivel de f y g sean tangentes entre sí
Se usará el "lagrangiano"

Ejemplo:

Se desea maximizar $f(x,y) = 2x + y$
Sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$

Cuando las curvas de nivel de f y g son tangentes, sus vectores son paralelos

Utilizaremos la condición de tangencia:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

Utilizamos los gradientes

La función Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Ejemplo
Resolver

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$$
$$f(x,y) = 2x + y$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\nabla f(x,y,z) = 0$$

$$\nabla f(x,y,\lambda) = \nabla[\lambda(x^2 + y^2 - 1)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \qquad 0 = g$$

Esto nos quedará como

$2 = 2x\lambda$ $\quad 1 = 2y\lambda$ $\quad 0 = x^2 + y^2 - 1$

Ahora para resolver el sistema

$2 = 2x\lambda$ ①
$1 = 2y\lambda$ ②
$0 = x^2 + y^2 - 1$ ③

De ①
$$x = \frac{1}{\lambda}$$

De ②
$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

Sustituyendo en ③
$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$
$$4 + 1 = 4\lambda^2$$
$$\frac{5}{4} = \lambda^2$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

Para $\lambda = \sqrt{\frac{5}{4}}$
$$ER_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$f(ER_1) = 2.23606$
Máximo

$\lambda = -\sqrt{\frac{5}{4}}$
$$ER_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$f(ER_2) = -2.23606$
Mínimo

Usando multiplicadores de Lagrange resuelvo

1- Maximizar $f(x,y) = \cancel{2x+y}$ x^2y sujeta a $g(x,y): x^2+y^2=1$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2y - \lambda(x^2+y^2-1)$$
$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x} \qquad 2xy = 2x\lambda$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y} \qquad x^2 = 2y\lambda$$
$$g = 0 \qquad x^2+y^2=1$$

$$2xy = 2x\lambda \quad ①$$
$$x^2 = 2y\lambda \quad ②$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad ③$$

De ①

$$y = \lambda$$

De ②

$$x^2 = 2\lambda^2$$

En ③

$$2\lambda^2 + \lambda^2 = 1$$
$$3\lambda^2 = 1$$
$$\lambda^2 = \frac{1}{3}$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x^2 = 2 \cdot \frac{1}{3}$$
$$x^2 = \frac{2}{3}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

p.c.1 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $f(pc_1) = 0.3849$ Maximo

p.c.2 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $f(pc_2) = -0.3849$ Minimo

p.c.3 $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $f(pc_3) = 0.3849$ Máximo

p.c.4 $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $f(pc_4) = -0.3849$ Minimo

14 / 09 / 20

Maximizar e^{xy} sujeto a $x^2+4y^2=4$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = e^{xy} - \lambda(x^2+4y^2-4)$$

$$\nabla \mathcal{L} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \qquad y e^{xy} = \lambda 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \qquad x e^{xy} = \lambda 8y$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = g \qquad 0 = x^2+4y^2-4$$

$$x^2+4y^2=4$$

$$y e^{xy} = \lambda 2x \quad (1)$$
$$x e^{xy} = \lambda 8y \quad (2)$$
$$x^2+4y^2=4 \quad (3)$$

De (1)

$$\frac{y e^{xy}}{2x} = \lambda \quad (4)$$

De (2)

$$\frac{x e^{xy}}{8y} = \lambda \quad (5)$$

Igualando (4) y (5)

$$\frac{y e^{xy}}{2x} = \frac{x e^{xy}}{8y}$$
$$8y^2 e^{xy} = 2x^2 e^{xy}$$
$$8y^2 = 2x^2$$
$$4y^2 = x^2 \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3)

$$4y^2 + 4y^2 = 4$$
$$8y^2 = 4$$
$$y^2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore \ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 + x^2 = 4$$
$$2x^2 = 4$$
$$x^2 = 2$$
$$\therefore \ x = \pm\sqrt{2}$$

Asi existen 4 extremos relativos

$P_1\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $f(p_1) = 2.71828$ maximo

$P_2\left(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $f(p_2) = 0.36788$ minimo

$P_3\left(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $f(p_3) = 0.36788$ minimo

$P_4\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $f(p_4) = 2.71828$ maximo

Resuelva

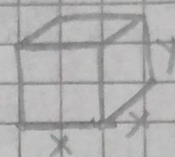
Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un

$V = 50 cm^3$

Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado

$A = x^2 + 4xy$

$V \rightarrow x^2 y = 50 cm^3$



Minimizaremos

$x^2 + 4xy$

$x^2 y = 50$ => Como hay una restricción de igualdad, lo correcto es aplicar multiplicadores de Lagrange

$2x + 4y = \lambda 2xy$ ①

$4x = \lambda x^2$ ②

$x^2 y = 50$ ③

②

$\lambda x = \frac{4x}{x}$

$\lambda x = 4$

$\lambda x = \frac{2x + 4y}{2y}$

$\lambda x = \frac{x}{y} + 2$

$4 - 2 = \frac{x}{y}$

$2y = x$

$x^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 50$

$\frac{x^3}{2} = 50$

$x^3 = 100$

$x = \sqrt[3]{100}$

$x = 4.6415$ cm

$4.64^2 y = 50$

$y = 2.321$ cm

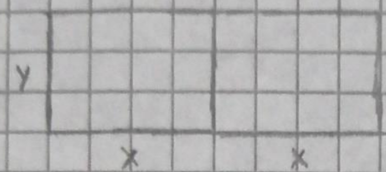
Las dimensiones son

15 / 09 / 20

Resuelva los problemas de optimización con multiplicadores de Lagrange

Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos

Determine el área máxima



Maximizar $2xy$ — $f(x)$

Restricción $4x + 3y = 300m$ — $g(x)$

$$2y = 4\lambda \rightarrow y = 2\lambda$$
$$2x = 3\lambda \rightarrow x = \frac{3\lambda}{2}$$
$$4x + 3y = 300$$

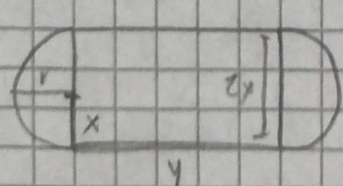
$$4\left(\frac{3\lambda}{2}\right) + 3(2\lambda) = 300$$
$$6\lambda + 6\lambda = 300$$
$$12\lambda = 300$$
$$\lambda = 25$$

$\therefore$ $x = \frac{75}{2}$, $y = 50$

pc $\left(\frac{75}{2}, 50\right)$

Área máxima $3750\ m^2$

Oc



Maximizar $\pi x^2 + 2xy$ — Área

Restricción $2\pi x + 2y = 50m$ — Perímetro

$$2\pi x + 2y = 2\pi\lambda$$
$$2x = 2\lambda \qquad x = \lambda$$
$$2\pi x + 2y = 50$$

$$2\pi x + 2y - 2\pi\lambda = 0$$
$$2x - 2\lambda = 0$$
$$2\pi x + 2y = 50$$

$x = 7.95774$

$y = 0$

$\lambda = 7.95774$

$A = 200.8$

21/09/20

Optimización Numérica

Localización de raíces — Buscar ceros

Optimización — Buscar máximos o mínimos

Problema de optimización

Consiste en determinar x que minimiza o maximiza $f(x)$

Unidimensional

Multidimensional

- Métodos de gradiente
- Métodos directos

Sección dorado

Técnica similar al método de bisección

- Inicia en un intervalo entre x_L y x_U con una sola respuesta
- Se establecen dos puntos intermedios
- Se identifica el subintervalo que contiene el óptimo

Tenemos

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_U - x_L)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_L + d \\ x_2 = x_U - d \end{cases}$$

- Se eligen dos puntos de acuerdo a la razón dorada
- Se evalúa la función en esos puntos y
  - Si $f(x_1) >= f(x_2)$ se elimina la sección a la izquierda de x_2, así x_L siguiente $= x_2$, x_2 siguiente $= x_1$ y x_1 siguiente $= x_L + R(x_U - x_L$ siguiente$)$
  - Si $f(x_2) >= f(x_1)$ se elimina la sección de la derecha de x_1, así x_U siguiente $= x_1$, x_1 siguiente $= x_2$ y x_2 siguiente $= x_U - R(x_U - x_L)$
- Se continúa iterando hasta un criterio de paro

Ejemplo: Use la búsqueda de la sección dorada para encontrar el máximo de $f(x) = 2\,\text{sen}(x) - \frac{x^2}{10}$ dentro del intervalo $x_L = 0$ $x_U = 4$ rad con 8 iteraciones

i	d	x_L	x_2	$f(x_2)$	x_1	$f(x_1)$	x_U
1	2.4721	0	1.5278	1.7647	2.4721	0.6299	4
2	1.5278	0	0.9442	1.5309	1.5278	1.7647	2.4721
3							
4							
5							
6							
7							
8							

24/09/20

Interpolación cuadrática

Como no hay dos cuadráticas que pasen por los mismos 3 puntos planteamos una $f(x) = a + bx + cx^2$ basado en x_0, x_1 y x_2 y llegaremos a una x_3 por una ecuación dada

Metaheurísticas

- Metodos clásicos
  - Calculo
  - Gradiente
  - Hessiano
- Metodos numéricos
  - Sección dorada
  - Interpolación cuadrática
  - Simplex
  - ...
- Tecnicas heurísticas
  - Algoritmos evolutivos
  - Optimización mediante colonia de hormigas

Método heurístico: Procedimiento que trata de descubrir una solución factible muy buena aunque no necesariamente buena

Análisis Práctica 1

Paso 1. $xL = 0$, $xU = 4$

$$x_1 = xL + \underbrace{\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}(xU - xL)\right]}_{d} = 2.4721$$

$$x_2 = xU - d = 1.52786$$

Paso 2: Como $f(x_2) > f(x_1)$ eliminamos la derecha de x_1

Ahora $xU = x_1 = 2.47$

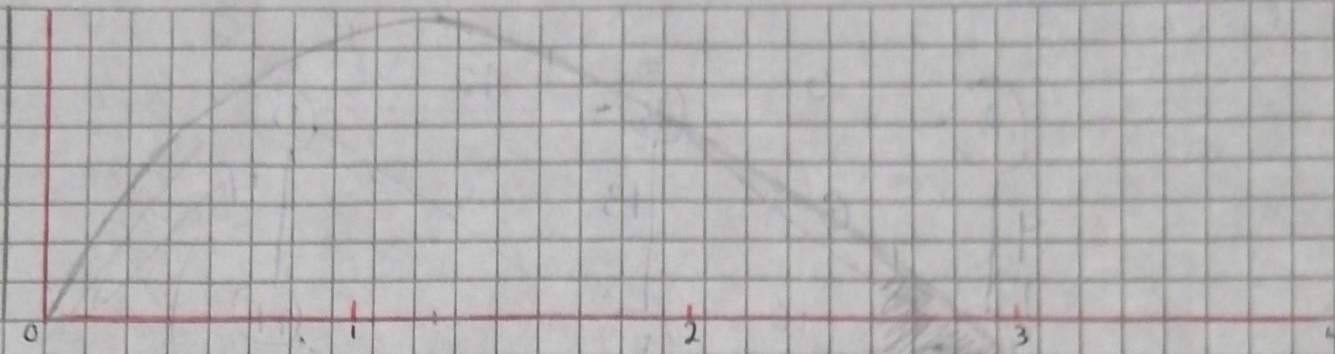
$$x_1 = xL + d = 1.52786$$
$$x_2 = xU - d = 0.9442$$

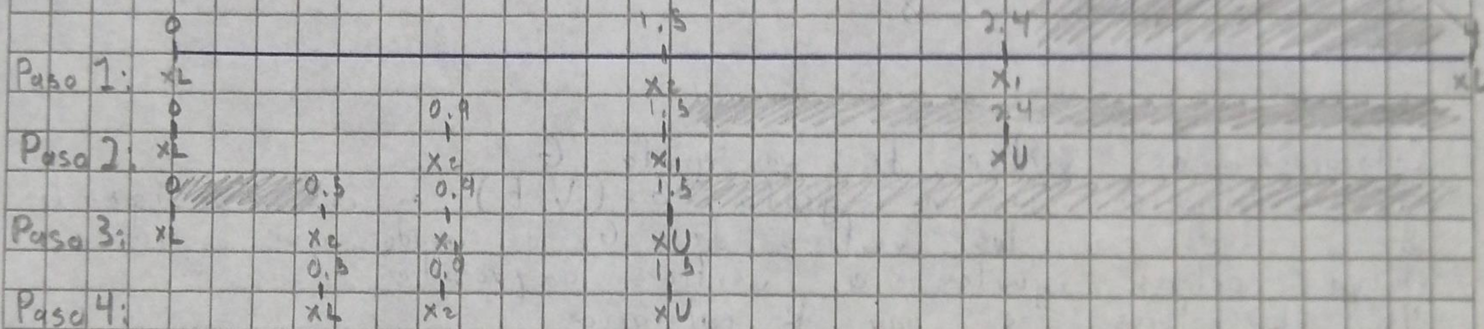
Paso 3: Como $f(x_2) > f(x_1)$ eliminamos la derecha de x_1

Ahora $xU = x_1 = 1.52786$

$$x_1 = xL + d = 0.9442$$
$$x_2 = xU - d = 0.5835$$

Paso 4: Como $f(x_1) > f(x_2)$ eliminamos a la izquierda de x_2





Heurística de la ciudad más cercana

1- Se parte de una ciudad concreta, eliminándola del conjunto de nodos y escogiendo como su seguidora en el circuito a aquella situada a menor distancia

2- Se repite el procese a partir de la misma considerando como posibles seguidoras sólo las contenidas como disponibles del conjunto actual

3- El algoritmo finaliza cuando el conjunto queda vacío

Algoritmo

1- Inicializar el conjunto de nodos con todas las ciudades

2- Sol [1] ← j (ciudad de comienzo)

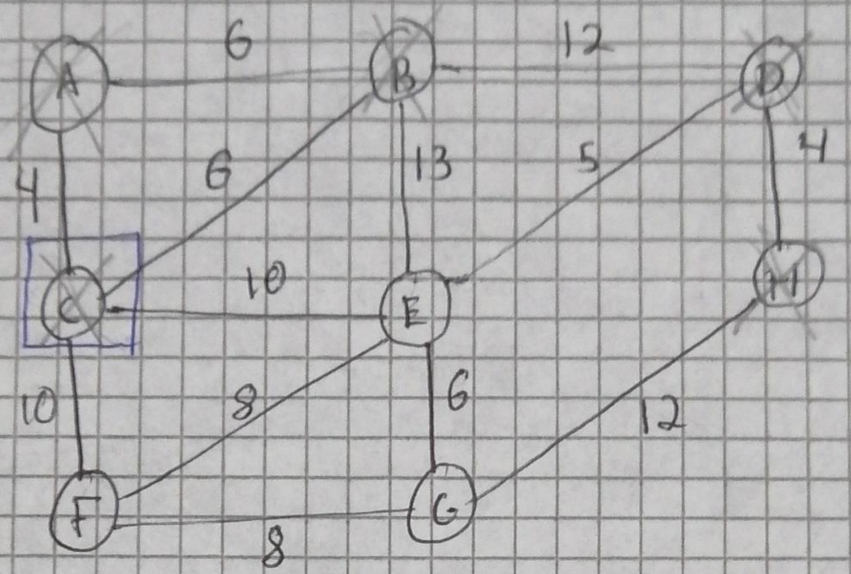
3- Eliminar j del conjunto de nodos $V \leftarrow V - \{j\}$

4- Repetir para i=2 hasta n

Sol[i] ← Ciudad más cercana (Sol [i-1])

Eliminar ciudad más cercana y devolver sol

Ejercicio:



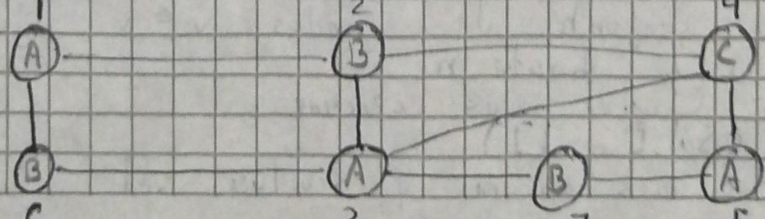
Sol = [C, A, B, D, H, G, E, F, C]

Coloración de vértices de un grafo G
Una coloración de un grafo $G = (V, E)$ es una asignación de colores a los vértices de G de modo que no haya colores iguales a vértices adyacentes
Usar k colores es una k coloración
El número cromático de G, $\chi(G)$ es el mínimo necesario de colores para colorear G

28-09-20

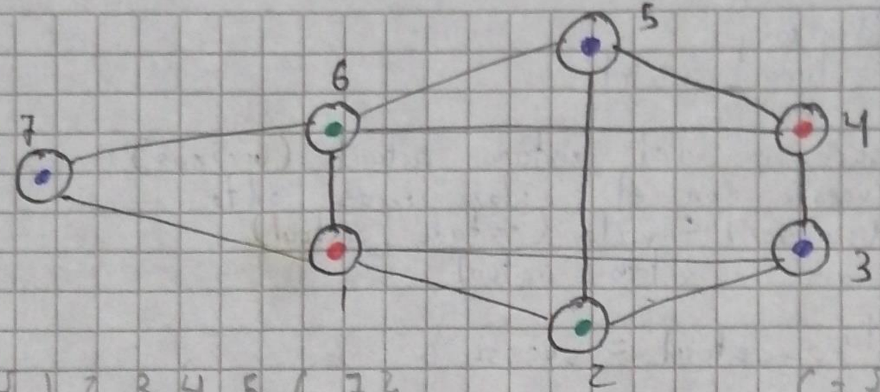
Coloración de vértices de un grafo
Algoritmo secuencia (Greedy)
1- Organizar y almacenar los vértices del grafo y los colores
2- Asignar el color c_1 al vértice v_1 (de acuerdo al orden establecido en el paso anterior)
3- Para asignar un color al vértice v_2 se verifica si es adyacente al vértice v_1
- Si es adyacente, se asigna el siguiente color c_2
- En otro caso se asigna c_1

Por ejemplo



$\chi(G) = 3$

28/09/20



$\chi(G) = 3$

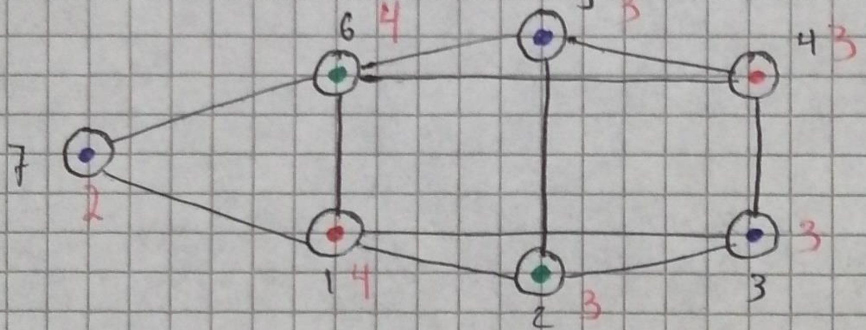
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $C = \{•, •, •, •\}$

Algoritmo Welsh - Powell

En este algoritmo los vértices se ordenan de mayor a menor grado

Ejemplo

Realice la coloración del siguiente grafo usando el algoritmo de Welsh Powell



El grado lo escribimos en rojo y el orden es:

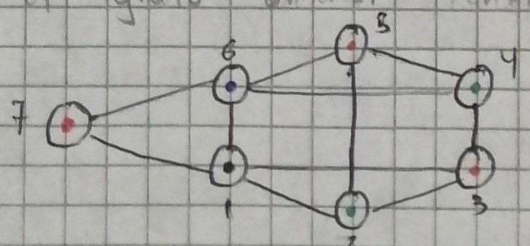
$V = [1, 6, 2, 3, 4, 5, 7]$

$C = \{•, •, •, •\}$

Algoritmo de Matula - Marble - Isacsson

En este caso el orden de vértices es el opuesto al Welsh - Powell

Con el grafo anterior tenemos



$v = [7, 5, 4, 3, 2, 6, 1]$

$c = \{•, •, •, •\}$

$\chi(G) = 4$

29 / 09 / 20

Algoritmo Hill Climbing

```
estado_actual = estado_inicial
loop
    Generar sucesores del estado actual (vecinos)
    Obtener sucesor con el valor más alto
    if valor(sucesor) < valor(estado_actual)
            return resultado_actual
    else
            estado_actual = sucesor
```

Si se desea maximizar ?

Heurística de Búsqueda Local

Para cada solución factible $s \in S$ se define el vecindario $N(s)$ como el conjunto de soluciones vecinas de s

Ejercicio

Defina un vecindario para un problema de agrupamiento de objetos en tres clases representados con enteros

Veamos sí

a	b	c	d	e	f	g
1	2	3	4	5	6	7

1	2	3	4	5	6	7
A	A	C	B	A	B	C

1 2 5   3   4 6

Una metaheurística es un método heurístico para resolver un tipo de problema computacional global

Una heurística es local

Una metaheurística es global

Estrategias de alto nivel usando algunos métodos

Criterios opuestos

- Exploración (Diversificación)
- Explotación (Intensificación)

30/09/20

Clasificaciones de Metaheurísticas

- Bioinspiradas o inspiradas en la naturaleza
- Basadas en poblaciones o en un punto simple

- con funciones objetivos dinámicas o estáticas
- con estructuras de una vecindad o con varias vecindades
- las que usan memoria o usan la información del estado actual

----- END OF PRIMER PARCIAL

Elementos de la modelación

En un problema debemos establecer

- un mecanismo de representación (modelar el problema)
- una función objetivo

Los objetos tienen tanto un valor como un peso
Una representación tiene genotipo y fenotipo
Una buena representación debe adaptarse a:

- El mecanismo de generación de solución o soluciones
- El problema que se desea resolver
- Los operadores de búsqueda (transformación)
- El cálculo de la función objetivo

Características de la representación:

- Completitud: Deben representarse todas las soluciones
- Eficiencia: Debe ser fácil de manipular

01-10-20

Ejemplo

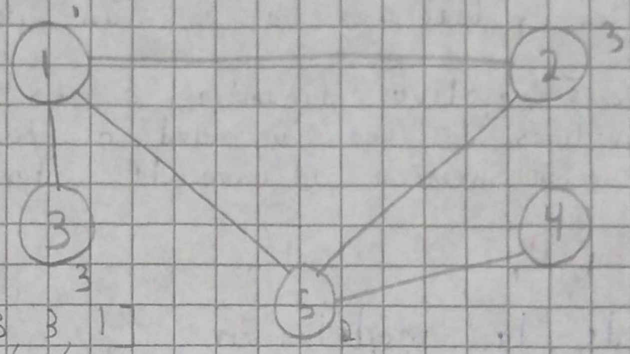
El problema de las n reinas
El problema de las 8 reinas

El espacio de soluciones sería 64^8 ($> 2.8 \times 10^{14}$)
Si reducimos más a una reina por renglón serían
8^8 soluciones (> 16 millones)
Si reducimos a una reina por renglón y columna, serían
$n!$ soluciones

Analisis Práctica 3

Supongamos el grafo

	1	2	3	4	5	T
1	0	1	1	0	1	3
2	1	0	0	0	1	2
3	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1	1
5	1	1	0	1	0	3



V=[1, 5, 2, 3, 4] C=[1, 2, 3, 3, 1]

1: 1 le asignamos el color 1

2: Revisamos 5

¿Es adyacente a 1? Sí, entonces no podemos asignarle 1, 2 sí

3: Revisamos 2

¿Es adyacente a 1? Sí, entonces no podemos asignarle 1

¿Es adyacente a 5? Sí, entonces no podemos asignarle 2, 3 sí

4: Revisamos 3

¿Es adyacente a 1? Sí, ∴ no podemos asignarle 1

5 Sí, 2

2 No, no existe problema en asignarle 3

5: Revisamos 4

1 No,

06-10-20

Construir técnica inteligente para diseñar interfaces de usuario

07-10-20

Función objetivo

Formula la meta que debe ser alcanzada

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$

Si no es adecuada, la metaheurística puede conducir a soluciones no aceptables

Función objetivo directo

Función objetivo indirecto → Se deben hacer con base en otras variables

08 / 10 / 20

Ejemplo El problema de la satisfactibilidad booleana
Dada una función f el objetivo es encontrar una asignación de las k variables para que sea verdadero

10 - 10 - 20

Tarea 7: Análisis

Pensemos en el tablero

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Y el vector

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5

Ponemos todo el vector en 1

Algunas estrategias para construir las soluciones de un problema son las siguientes:

- De rechazo (Se eliminan soluciones no factibles)
- De penalización (Se conservan pero se penalizan en feedness) → estática → dinámica
- De reparación (Transformar soluciones no factibles en factibles)
- De decodificación (Una función $R \to S$ que asocia cada $r \in R$ con una solución $s \in S$)
- De preservación (Produce sólo soluciones factibles)

16 - 10 - 20

Es importante retomar los conceptos de biología:
Cromosomas
Gen
Fenotipo (Objeto)
Genotipo ((Codificación))
Generación (Iteración)
Feedness
Medida de aptitud
Descendencia

Los cromosomas a veces se representan por cadenas binarias
Los operadores en algoritmos genéticos son:
- Selección (las más clásicas son el elitismo o rueda de ruleta)
- Cruzamiento (crossover)
- Mutación

Seleccion

Algoritmo de la ruleta
- Calcular suma acumulada de la aptitud de todos los individuos de la población total
- Generar un número aleatorio entre 0 y Suma Total
- Evaluar

19-10-20

Otros mecanismos de selección:
- Basado en el rango
  - Se mantiene un % de la población
  - Los M peores se sustituyen por la descendencia de los mejores
- Selección por torneo (Golberg, Korb y Deb)
  - Se toman T individuos y se considera al mejor adaptable (determinista) o el mejor o peor (probabilista)
  - Se selecciona un g de individuos y se realiza la ruleta a manera binario

Cruzamiento

Intercambio de material genético entre dos cromosomas
Un algoritmo genético no existe sin cruzamiento

Nueva generación

Después del cruzamiento, los hijos sustituyen a los padres para evaluarlos a ellos

Mecanismos

Dependen de la representación
- De dos puntos
  Se eligen aleatoriamente dos puntos de ruptura en los padres y se intercambian los bits
- Uniforme
  Se basa en la distribución de probabilidad uniforme
  En cada bit se elige al azar un padre para que contribuya con su bit al del hijo, mientras que el segundo hijo recibe el bit de otro padre

Mutación
Su objetivo es producir diversidad en la población
Teniendo una probabilidad en cuenta se altera un bit o un gen de un cromosoma

Pseudocodigo Algoritmo genético simple
1.- Sea $t=0$ el contador de generaciones
2.- Inicializa $P(t)$
3.- Evalúa $P(t)$
4 Mientras no se cumpla un criterio de paro, hacer
a) Para $i=1, \ldots, N/2$ hacer
- Selecciona 2 padres de $P(t)$
- Aplica cruzamiento a los dos padres con probabilidad pc
- Muta la descendencia con probabilidad pm
- Introduce los dos nuevos individuos en $P(t+1)$
Fin_para

Opera de forma simultánea con varias soluciones
Es fácil de entender
Es de forma probabilística
Es una técnica robusta
No garantiza que encuentre la solución óptima al problema

21-10-20

Recocido Simulado (Simulated Annealing)
Los procedimientos para el espacio de búsqueda pueden ser
- De búsqueda local
- De búsqueda global

Métodos para escapar de óptimos locales
- Arranque múltiple: Rearranca la búsqueda desde otra posición del espacio de soluciones
- Vecindario variable: Modifica la estructura del entorno de una solución
- Permitir soluciones que no mejoran el valor de la función objetivo con cierta probabilidad

Es un algoritmo de búsqueda probabilística metaheurística para problemas de optimización con variables discretas por Kirkpatrick

Algoritmo de Metrópolis
Regla de aceptación

Dado un estado i con energía E_i

Se genera un nuevo estado j mediante un mecanismo de perturbación

Se calcula la energía de j: E_j

Si $E_j - E_i \leq 0$ se acepta j (suponiendo minimización

Si no, se acepta j con probabilidad:

$$P = \exp\left(\frac{E_i - E_j}{K_B T}\right)$$

donde:

K_B es la constante de Boltzmann

T es la temperatura

$K_B T$: C parámetro de control

Análisis: Práctica 4.

i_1 [ ]

i_2 [ ]

i_3

i_4

i_5

i_6

$\vdots$

i_{29}

i_{30}

Análisis Práctica 4

sample

1 [1, 2, 3, 4, 5 ... 10]

⋮

30 [1 ... 10]

23 - 10 - 20

Recocido Simulado

Iteración de algoritmos de Metrópolis

Utiliza individuos y poblaciones de individuos

Mecanismo de enfriamiento

"Se calientan los materiales de manera abrupta (templado) o paulatinamente (recocido)" usando una sucesión finita que es kT

Generar $i = i_0$ (Solución inicial)

$T = T_0$

⋮

Útil en minimización

26 - 10 - 20

1. Lo que busca x^*
2. Representación
3. Evaluación de una solución (Fitness)
4. Establecer parámetros

T_0 = Temperatura inicial

T_f = Temperatura final

α = Factor de enfriamiento

β = Factor de reducción de iteraciones

K = Número de iteraciones

A = Número de aceptaciones

Generar i

	16	8	4	2	1	i	E(i)	T
	1	0	0	1	1	19	2399	100

$x^3 - 60x^2 + 900x + 100$

i perturbada

						j	E(j)
j	0	0	0	1	1	3	2287

Acepto j si la probabilidad me dice que la acepte
Acepto j si $r < \exp\left(\frac{-\Delta E}{T}\right)$

Suponemos que no | R | T | k++
| | no | 100 |

Su convergencia si se presenta con buenos parámetros

Ejemplo

Un subviaje inverso ajusta la secuencia de ciudades visitadas en la solución de prueba actual mediante la selección de una subsecuencia de las ciudades y simplemente el orden en el cual se visita esa subsecuencia

Colonia de hormigas

09 / 11 / 20

Optimización Multiobjetivo

Hay problemas de optimización con múltiples criterios
Una solución del óptimo de Pareto (Frente de Pareto) no puede mejorar un objetivo sin deteriorar otro
Nos interesa la convergencia hacia el óptimo de Pareto y la diversidad
~~Diversidad~~
La relación de orden entre soluciones es parcial

Formulación

$$MOP = \begin{cases} \min \; F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \\ s.c. \; x \in S \end{cases}$$

Donde

- n $(n \geq 2)$ es el número de objetivos
- x $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es el vector que representa a las variables de decisión
- S es el espacio de soluciones

Espacios objetivo y de las variables de decisión

En un MOP las funciones objetivo constituyen un espacio multidimensional además del espacio de las variables de decisión usual

Una solución u domina a otra solución v y se denota por $u \prec v$

La solución $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ domina a $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ si y solo si

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : u_i < v_i$$

Análisis Práctica 7

Suponemos un grafo graph

$$\begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1v} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2v} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots & P_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{v1} & P_{v2} & P_{v3} & \cdots & P_{vv} \end{matrix}$$

Suponemos una matriz de feromonas

$$\begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1v} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & T_{2v} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \cdots & T_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{v1} & T_{v2} & T_{v3} & \cdots & T_{vv} \end{matrix}$$

Con lo anterior generamos visión

$$\begin{matrix} T\eta_{11} & T\eta_{12} & T\eta_{13} & \cdots & T\eta_{1v} \\ T\eta_{21} & T\eta_{22} & T\eta_{23} & \cdots & T\eta_{2v} \\ T\eta_{31} & T\eta_{32} & T\eta_{33} & \cdots & T\eta_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T\eta_{v1} & T\eta_{v2} & T\eta_{v3} & \cdots & T\eta_{vv} \end{matrix}$$

Donde $T\eta_{mn} = \begin{cases} \dfrac{T_{mn}}{P_{mn}} & \text{si } P_{mn} \neq 0 \\ 0 & \text{si } P_{mn} = 0 \end{cases}$

Suponiendo h hormigas tenemos una lista tabú:

$$\begin{matrix} h_1v_1 & h_1v_2 & h_1v_3 & \cdots & h_1v_v \\ h_2v_1 & h_2v_2 & h_2v_3 & \cdots & h_2v_v \\ h_3v_1 & h_3v_2 & h_3v_3 & \cdots & h_3v_v \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_hv_1 & h_hv_2 & h_hv_3 & \cdots & h_hv_v \end{matrix}$$

También cada hormiga tiene un punto de inicio y fin

$$\begin{matrix} h_1i & h_1f \\ h_2i & h_2f \\ h_3i & h_3f \\ \vdots & \vdots \\ h_hi & h_hf \end{matrix}$$

Comenzamos a definir el tour para h_1

Empezamos en h_1i, por lo tanto lo agregamos en la lista tabú h_1v_1
Seleccionamos aleatoriamente un nodo (los no conectados no se toman en cuenta) pero sí comparamos con una lista auxiliar
Si ya se escogió, la selección aleatoria se vuelve a hacer
Si el tomado es h_1f terminamos
Si se encerró damos una tolerancia de 50 intentos más de buscar aleatoriamente o reiniciar todo el camino

Tengo population:

1	l_1	d_1	P_1	D_1
2	l_2	d_2	P_2	D_2
3	l_3	d_3	P_3	D_3
⋮	⋮	⋮	⋮	

solutions = { }

1.- Agregamos 1
 solutions = {1};

2.- Comparamos 1 y 2
 Si 2 no domina a 1, aumentamos y volvemos al primer elemento de solutions

3.- Comparamos 1 y 3
 Si 3 no domina a 1, aumentamos y volvemos al primer elemento de solutions

4.- Comparamos 1 y 4
 Si 4 si domina a 1, borramos 1 de solutions y agregamos 4 a P'
 solutions = {4}

5.- Comparamos 4 y 5

/ /

Tarea 1: Optimización Inteligente

1.- $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Como $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, no existen puntos críticos por puntos indefinidos, pues:

$$f'(x) = -2x + 2$$

Ahora igualando a cero

$$-2x + 2 = 0$$
$$x = 1$$

Encontramos un punto crítico

Para conocer si es un máximo o mínimo, derivamos nuevamente

$$f''(x) = -2$$
$$\therefore f''(1) = -2$$

Así encontramos que el punto que se encuentra en $x=1$ es un máximo: $f(1) = 4$

2.- $f(x) = 3x^3 + 8, \quad -2 \leq x \leq 2$

Observamos que tanto para $f(x)$ como para $f'(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ la función es continua, así que igualamos a cero y derivamos:

$$f'(x) = 6x$$
$$6x = 0$$
$$\therefore x = 0$$

Por lo tanto en $x = 0$ tenemos un punto crítico

Para buscar los máximos y mínimos locales, tendremos de candidatos:

$$f(-2)$$
$$f(0)$$
$$f(2)$$

Así:

$f(-2) = -16$ $\Rightarrow$ Mínimo

$f(0) = 8$

$f(2) = 32$ $\Rightarrow$ Máximo

Joel Alejandro Espinoza Sánchez

/ /

Tarea 2: Optimización Inteligente

Clasifique los puntos críticos de:

1: $f(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$

Primero hallamos el gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28x - 6x^2 + 4y \\ 4y + 4x \end{pmatrix}$$

Igualamos a cero y resolveremos:

$$28x - 6x^2 + 4y = 0 \quad (1)$$
$$4y + 4x = 0 \quad (2)$$

Despejamos (2)

$$4x = -4y \quad (3)$$
$$\therefore x = -y$$

Sustituimos en (1)

$$-28y - 6(-y)^2 + 4y = 0$$
$$-28y - 6y^2 + 4y = 0$$
$$-6y^2 - 24y = 0$$
$$-6(y^2 + 4y) = 0$$
$$y(y+4) = 0$$
$$\therefore \quad y = 0 \qquad y = -4$$

Y por igualdad en (2)

Si $y = 0 \rightarrow x = 0$, así también si $y = -4$, $x = 4$

Ahora hallamos la Matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 - 12x & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Evaluamos y obtenemos sus determinantes:

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 28 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 96$$

$(0,0)$ es un extremo relativo, más específicamente es un mínimo relativo

$$|Hf(4,-4)| = \begin{vmatrix} -20 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -96$$

$(4,-4)$ es un punto de silla

Joel Alejandro Espinoza Sánchez

2.- $f(x,y) = 2x^2y - 9y^2 + 12x - 7$

Hallamos el gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy + 12 \\ 2x^2 - 18y \end{pmatrix}$$

Igualamos a 0 y resolvemos:

$$4xy + 12 = 0 \qquad (1)$$

$$2x^2 - 18y = 0 \qquad (2)$$

De (2)

$$2x^2 = 18y$$

$$x^2 = 9y$$

$$\frac{x^2}{9} = y \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1)

$$4x\left(\frac{x^2}{9}\right) + 12 = 0$$

$$\frac{4x^3}{9} + 12 = 0$$

$$\frac{4x^3}{9} = -12$$

$$4x^3 = -108$$

$$x^3 = -27$$

$$x^3 + 27 = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$x = -3$ Sin soluciones reales

Por sustitución, si $x = -3 \rightarrow y = 1$

Ahora hallamos la Matriz Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & -18 \end{pmatrix}$$

Evaluamos su determinante

$$|Hf(-3,1)| = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -12 & -18 \end{vmatrix} = -216$$

$(-3,1)$ es un punto de silla

Joel Alejandro Espinoza Sánchez

Tarea 3: Funciones de varias variables

1- Encuentre y clasifique los puntos críticos de:

$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy + 2y + 2yz - 3$$

Primero derivamos parcialmente para obtener el gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 8y - 2x + 2 + 2z \\ 2z + 2y \end{pmatrix}$$

Igualamos a 0

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ -2x + 8y + 2z &= -2 \\ 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$x = -\frac{1}{2} \qquad y = -\frac{1}{2} \qquad z = \frac{1}{2}$$

Ahora hallamos la matriz Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluando la Hessiana en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$|2| = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Al ser todos positivos tenemos un mínimo relativo

/ /

Tarea 4: La función Lagrangiana

1. Maximizar $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ sujeto a $g(x,y,z): 2x - 3y - 4z = 49$

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - \lambda(2x - 3y - 4z - 49)$$

$$\nabla \mathcal{L} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \qquad 4x = 2\lambda \quad ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow 2y = -3\lambda \quad ②$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \qquad 6z = -4\lambda \quad ③$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = g \qquad 2x - 3y - 4z = 49 \quad ④$$

De ① $x = \frac{\lambda}{2}$ De ② $y = -\frac{3\lambda}{2}$ De ③ $z = -\frac{2\lambda}{3}$

Sustituyendo ahora en ④

$$2\left(\frac{\lambda}{2}\right) - 3\left(-\frac{3\lambda}{2}\right) - 4\left(-\frac{2\lambda}{3}\right) = 49$$

$$\lambda + \frac{9\lambda}{2} + \frac{8\lambda}{3} = 49$$

$$\frac{49\lambda}{6} = 49 \Rightarrow \lambda = 6$$

Sustituyendo λ en ①, ②, ③

$x = 3$ $y = -9$ $z = -4$

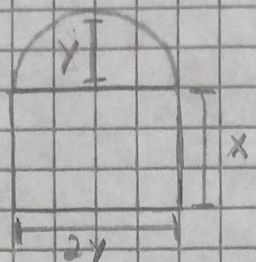
Existe un extremo:

$$P(3,-9,-4) \Rightarrow f(P) = 147$$

Tarea 5

1.- Una ventana presenta la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima si su perímetro es de 10 m

Planteemos la figura:



De modo que el área está determinada por:

$$A(x,y) = 2xy + \frac{\pi y^2}{2} \Rightarrow f(x)$$

Y el perímetro:

$$P = 2x + 2y + \pi y = 10\,m \Rightarrow g(x)$$

Comenzando por el sistema de ecuaciones

$$2y = 2\lambda$$
$$2x + \pi y = \lambda(2+\pi)$$
$$2x + (2+\pi)y = 10$$

Reordenando $\Rightarrow$

$$2y - 2\lambda = 0$$
$$2x + \pi y - (2+\pi)\lambda = 0$$
$$2x + (2+\pi)y = 10$$

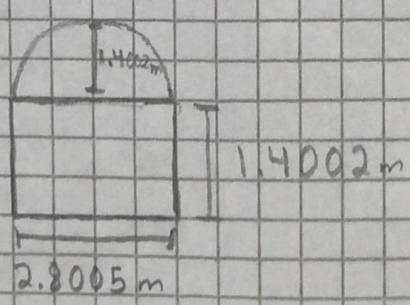
Resolviendo:

$$x = y = \lambda = 1.4002\ m$$

Sustituyendo:

$$A(1.4002, 1.4002) = 7.00124\ m^2$$

Así las dimensiones de la ventana son:



Joel Alejandro Espinoza Sánchez

24/09/20

Tarea para el parcial 1

1.- Determine en forma analítica los extremos relativos de las siguientes funciones. Determine qué tipo de extremo es

1.- $f(x) = x^2 - 8x + 12$

Para encontrar el extremo derivamos:

$$f'(x) = 2x - 8$$

Igualamos a 0

$$0 = 2x - 8$$
$$\therefore x = 4$$

Si derivamos nuevamente:

$$f''(x) = 2$$

Observamos que la concavidad en toda x es hacia arriba.
Por tanto hemos hallado un mínimo en $x = 4$

2.- $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y - 5$

Calculamos el gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x + 3 \end{pmatrix}$$

Ahora planteamos un sistema con los elementos del gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{matrix} 2x + y = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2x + y = 0 \\ x + 2y = -3 \end{matrix}$$ Al resolver: $$\begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \end{matrix}$$

Ahora hallamos la Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Evaluando su determinante en $x = 1,\ y = -2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Como $|Hf(1,-2)| > 0$ tenemos un extremo relativo y ya que el elemento $a_{11} > 0$ tenemos un mínimo relativo

3.- $f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$

Para encontrar los extremos derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = -9x^5 - 8x^3 + 12$$
$$-9x^5 - 8x^3 + 12 = 0$$
$$\therefore x = 0.91691$$

Al derivar nuevamente y evaluar $f(0.91691)$:

$$f''(x) = -45x^4 - 24x^2 \Rightarrow f''(0.91691) = -51.9841$$

Observamos que la concavidad en $x = 0.91691$ es hacia abajo
Por tanto hemos hallado un máximo en $x = 0.91691$

4- $f(x,y) = 2x^2y - 9y^2 + 12x - 7$

Calculamos el gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4xy + 12 \\ 2x^2 - 18y \end{pmatrix}$$

Planteamos el sistema

$$4xy + 12 = 0 \quad (1)$$
$$2x^2 - 18y = 0 \quad (2)$$

Despejando y en (2)

$$y = \frac{x^2}{9} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1)

$$\frac{4x^3}{9} + 12 = 0$$
$$4x^3 + 108 = 0$$
$$x^3 + 27 = 0$$
$$(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$x_1 = -3$

$x_2^2 - 3x_2 + 9 = 0$

x_2 no tiene soluciones reales

De (3)

$$y = \frac{(-3)^2}{9} \quad \therefore \quad y = 1$$

Ahora hallamos la Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & -18 \end{pmatrix}$$

Evaluando su determinante en $x = -3$, $y = 1$

$$\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -12 & -18 \end{vmatrix} = -216$$

Hemos encontrado un punto de silla en $x = -3$, $y = 1$

5- $3x^2 + y^2 + 2y$

Calculamos el gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x \\ 2y + 2 \end{pmatrix}$$

Planteamos el sistema:

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$2y + 2 = 0 \quad y = 1$$

Hallamos la Hessiana y evaluamos su determinante en $x = 0$, $y = 1$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Hallamos un mínimo relativo en $x = 0$, $y = 1$

2.- Plantee y resuelva analíticamente los siguientes problemas de optimización. Use el método de multiplicadores de Lagrange

1.- Veamos que

$$V = (\pi r^2) h \quad \Rightarrow f(r,h)$$

Y queremos que su área

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 80\, cm^2 \quad \Rightarrow g(r,h)$$

Así expresamos:

$$\mathcal{L}(r,h,\lambda) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r^2 + 2\pi r h - 80)$$

Con base en:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \lambda \frac{\partial g}{\partial h}$$

$$g = 0$$

Obtenemos:

$$2\pi r h = \lambda(4\pi r + 2\pi h) \quad ①$$

$$\pi r^2 = \lambda(2\pi r) \quad ②$$

$$2\pi r^2 + 2\pi r h - 80 = 0 \quad ③$$

De ②:

$$r = 2\lambda \quad ④$$

Sustituyendo ④ en ①

$$4\pi\lambda h = \lambda(8\pi\lambda + 2\pi h)$$

$$4\pi h = 8\pi\lambda + 2\pi h$$

$$2h = 4\lambda + h \Rightarrow h = 4\lambda \quad ⑤$$

Sustituyendo ⑤ en ③ y ④ en ③

$$8\pi\lambda^2 + 16\pi\lambda^2 = 80$$

$$\pi\lambda^2 + 2\pi\lambda^2 = 10$$

$$3\pi\lambda^2 = 10$$

$$\lambda^2 = \frac{10}{3\pi}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{10}{3\pi}}$$

$$\therefore r = 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{3\pi}}$$

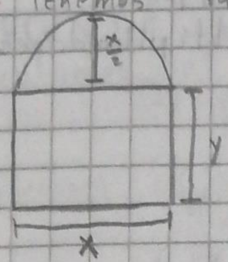
$$\therefore h = 4 \cdot \sqrt{\frac{10}{3\pi}}$$

Así encontramos que usando una superficie de $80\, cm^2$ al maximizar el volumen obtendremos $54.93677\, cm^3$ y se obtienen con las medidas: $r = 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{3\pi}}$ cm, $h = 4 \cdot \sqrt{\frac{10}{3\pi}}$ cm

$\pi \cdot \frac{x^2}{4}$ $\qquad \frac{\frac{\pi x^2}{4}}{2}$

/ /

2.- Tenemos la figura:



$$A = xy + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow f(x,y)$$

$$P = x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 10\,m \Rightarrow g(x,y)$$

Así expresamos:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \frac{\pi x^2}{8} - \lambda\left(x + 2y + \frac{\pi x}{2} - 10\right)$$

Y planteamos el sistema:

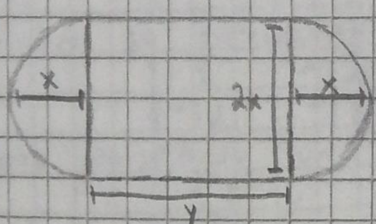
$$\left.\begin{aligned} y + \frac{\pi x}{4} &= \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ x &= 2\lambda \\ x + 2y + \frac{\pi x}{2} &= 10 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Reacomodando:}} \begin{aligned} \frac{\pi x}{4} + y - \left(\frac{2+\pi}{2}\right)\lambda &= 0 \\ x \qquad\qquad - 2\lambda &= 0 \\ \left(\frac{2+\pi}{2}\right)x + 2y \qquad &= 10 \end{aligned}$$

Al resolver:

$x = 2.8004$, $y = 1.4002$, $\lambda = 1.4002$

Hemos encontrado que con un perímetro de 10 m, maximizamos el área el cual es $7.0012\ m^2$, cuyas medidas son $x = 2.8004$, $y = 1.4002$

3.- Tenemos la figura



$$A = 2xy + \pi x^2 \Rightarrow f(x,y)$$

$$P = 2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow g(x,y)$$

Expresamos: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2xy + \pi x^2 - \lambda(2y + 2\pi x - 50)$

Planteamos:

$$\left.\begin{aligned} 2y + 2\pi x &= \lambda(2\pi) \\ 2x &= \lambda(2) \\ 2y + 2\pi x &= 50 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Reacomodamos}} \begin{aligned} 2\pi x + 2y - 2\pi\lambda &= 0 \\ 2x \qquad - 2\lambda &= 0 \\ 2\pi x + 2y \qquad &= 50 \end{aligned}$$

Al resolver:

$x = 7.9577$, $y = 0$, $\lambda = 7.9577$

Hemos encontrado que con un perímetro de 50 m, maximizamos el área el cual será $198.9436\ m^2$, con medidas $x = 7.9577$, $y = 0$

Scribe

4- Determine el óptimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $g(x) = 3x - 2y + z = 4$

$$\mathcal{L}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(3x - 2y + z - 4)$$

Planteamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 3\lambda \\ 2y = -2\lambda \\ 2z = \lambda \\ 3x - 2y + z = 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reacomodamos:}} \begin{array}{l} 2x - 3\lambda = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 2z - \lambda = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{array}$$

Al resolver:

$$x = \frac{6}{7} \quad y = -\frac{4}{7} \quad z = \frac{2}{7} \quad \lambda = \frac{4}{7}$$

Así, el óptimo se encuentra en $x = \frac{6}{7}, y = -\frac{4}{7}, z = \frac{2}{7}$

Tarea 6

1- ¿Cómo representaría una solución a un problema de agrupamiento. Suponga que es necesario agrupar un conjunto de n objetos

Suponemos n objetos que se agruparán.
Un primer pensamiento puede ser un vector que sea de la longitud de la cantidad de agrupaciones, sin embargo no conocemos la cantidad de agrupaciones que haremos

Por ello podemos proponer un vector de longitud n, ya que si pensamos que todos los elementos están agrupados el mínimo subconjunto posible es hacer agrupaciones de 1 elemento

La anterior idea lleva a pensar:
Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ un conjunto con los elementos a agrupar
Computacionalmente creamos un vector de tamaño $|E|$, es decir, de tamaño n donde la primera casilla es un espacio de información para el elemento e_1, la segunda es espacio para e_2 y así sucesivamente de modo que:

e_1	e_2	e_3	...	e_n
			...	

La información guardada en este vector puede ser al grupo que pertenece donde los grupos están etiquetados con los números enteros positivos empezando por el 1
El 0 durante el algoritmo puede significar que dicho elemento no ha sido agrupado en ninguna clasificación

2- ¿Cómo codificaría las soluciones a un problema de mente maestra (Descifra 5)?
Suponemos n colores o etiquetas diferentes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ y para este problema diremos que las posibles soluciones se encuentran al escoger ordenadamente y con repetición cinco colores de los anteriores.
El programa puede guardar en un vector de longitud 5 la clave aleatoria con la que se gana el juego que denominaremos como G y denominaremos como E al vector de longitud 5 de entrada del usuario

Joel Alejandro Espinoza Sánchez

/ /

Según las entradas guardadas en E, se puede comparar si algún elemento de E está en G y devolver al usuario si en E ingresó un color correcto esté o no en su posición

También se puede comparar el i-ésimo elemento de E con el i-ésimo elemento de G y devolver al usuario si en E ingresó, no sólo un color correcto sino también en su posición correcta dentro de G $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

El programa termina cuando encuentra 5 coincidencias de esta segunda condición

Joel Alejandro Espinoza Sánchez

Tarea 8:

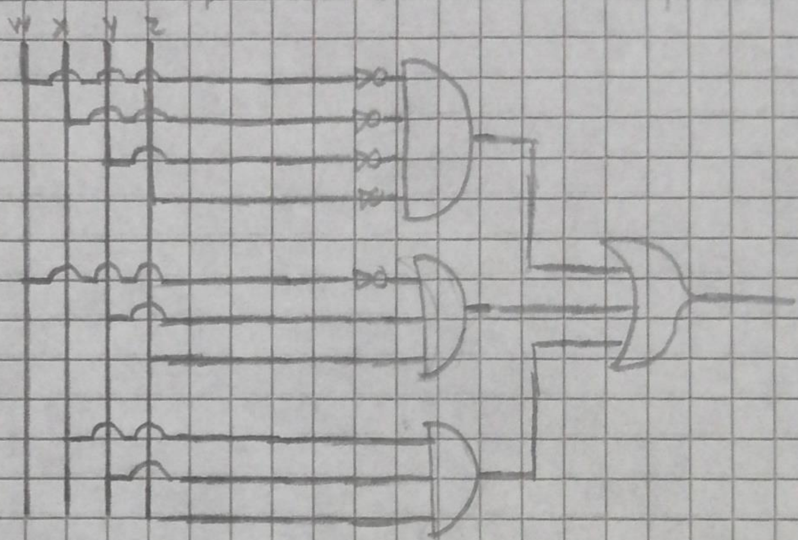
Comencemos con una tabla

	w	x	y	z	
-	0	0	0	0	1
	0	0	0	1	0
	0	0	1	0	0
-	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	0
	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	0
-	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0
	1	0	0	1	0
	1	0	1	0	0
	1	0	1	1	0
	1	1	0	0	0
	1	1	0	1	0
	1	1	1	0	0
-	1	1	1	1	1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1		1	
01			1	
11			1	
10				

$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}yz + xyz$

Con esta expresión se crea el óptimo



Y declararemos f como la evaluación booleana
f la definiremos como la evaluación de w, x, y, z en todas sus posibilidades obteniendo un número determinado de verdadero:

f puede valer $2^4 = 16$
Y debe tener en las posiciones 0, 3, 7 y 15 un 1
De ser falso se irán restando una unidad a 16
Así como debe tener en el resto de posiciones un 0
De ser falso, se seguirán restando una unidad a 16

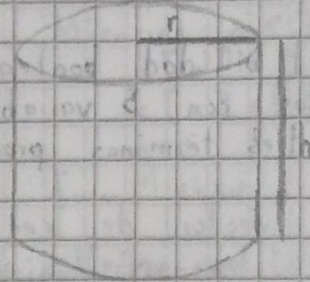
03 / 11 / 20

Tarea para el parcial 2

1.- Para los siguientes problemas, proponga un mecanismo de representación de soluciones. Desciiba el mecanismo y dé un ejemplo

a) Se debe minimizar las dimensiones de un recipiente cilíndrico de plástico, de manera que sea capaz de contener un litro de líquido

Claramente minimizamos lo siguiente:



$$A = 2\pi r^2 + 2rh$$

Pensando que el recipiente tenga tapa

h arbitrario dado

Sujeto a $V = \pi r^2 h = 1\,l$

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Una forma de representar las soluciones puede ser un vector de 3 elementos:

r	h	A

Vemos que el primer elemento corresponde al valor del radio, el segundo es la altura y el último será el Área obtenida

b) Se desea encontrar la combinación de una caja fuerte que se abre con movimientos alternados derecha izquierda. La combinación se forma con 6 movimientos que oscilan entre 1 y 20

Usaremos un vector de dimensión 7:

Cada valor del vector está definido como $x \in \mathbb{Z}^+ : 0 \leq x \leq 19$ excepto el primero, que está definido como $\{0, 1\}$; si éste es 0, el siguiente número indica movimiento a la izquierda y alterna. Si indica 1, el segundo valor indica movimiento a la derecha y alterna

c) Se desea resolver el problema de mente maestra (guess code) de clase

Suponemos n colores diferentes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ y encontramos la solución al problema escogiendo ordenadamente y con repetición cinco colores de los anteriores

El programa trabaja con dos vectores de longitud 5: la clave aleatoria con la que se gana el juego la llamaremos G y denotaremos como E al vector de longitud 5 de entrada del usuario

Joel Alejandro Espinoza Sánchez

Según los números guardados en G y las entradas de E se puede comparar si algún elemento de E está en G y devolver al usuario si en E ingresó un color correcto, esté o no en su posición

También se puede comparar el i-ésimo elemento de E con el i-ésimo elemento de G y devolver al usuario si en E ingresó un color correcto en su posición correcta dentro de G $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

d) Se desea resolver el problema de satisfactibilidad booleana para una función en la forma de suma de productos con 5 variables (a, b, c, d, e). Se sabe que la función tiene tres términos producto, pero no cuántos elementos tiene cada uno

Para representar el problema basta con un vector de longitud 6, donde los 5 primeros valores correspondan a las variables y el sexto sea la evaluación de las anteriores:

a	b	c	d	e	f

Claramente, todos los elementos del vector están definidos en $\{0, 1\}$

2- Para los siguientes casos hipotéticos, proponga un mecanismo de cruzamiento. Describa el algoritmo mediante pseudocódigo

a) Las soluciones tienen la misma forma que propuso en el inciso a) del ejercicio 1

Para la etapa de cruzamiento:

Escogemos dos cromosomas aleatorios: i, j

$rhijo1 = |r_i - r_j|$

$rhijo2 = r_i + r_j$

$hhijo1 = 1/[\pi(rhijo1)^2]$

$hhijo2 = 1/[\pi(rhijo2)^2]$

Donde rhijo1 es el radio del hijo 1 y hhijo1 es la altura del hijo 1. El proceso anterior se repite tantas veces necesarias para generar a todos los hijos

b) Las soluciones tienen la forma que propuso en el inciso b) del ejercicio 1

Para la etapa de cruzamiento: (h, k serán los hijos)

Escogemos dos cromosomas aleatorios i, j

h[0] = i[0] // Un padre hereda su dirección a un

k[0] = j[0] // hijo y el otro padre al otro

n = 1

Mientras n < 7

h[n] = (i[n] + j[n]) MOD 20

k[n] = |i[n] - j[n]|

n++

Fin_Mientras

c) Las soluciones tienen la forma que propuso en el inciso d) del ejercicio 1. Suponga que la función booleana es $f(a,b,c,d,e) = abd' + a'b'ce + ade'$

Escogemos dos cromosomas aleatorios i, j

k = 0

Mientras k < 5

Generamos r número aleatorio en {0, 1}

Si r = 0

hijo [k] = i[k] ∪ j[k]

Si r = 1

hijo [k] = i[k] ∩ j[k]

k++

Fin_Mientras

d)

Escogemos dos cromosomas aleatorios i, j

hijo [0] = (i[0] + j[0]) MOD 5

hijo [1] = (i[1] + j[1]) MOD 3

hijo [2] = (i[2] + j[2]) MOD 3

hijo [3] = (i[3] + j[3]) MOD 3

hijo [4] = (i[4] + j[4]) MOD 4

hijo [5] = (i[5] + j[5]) MOD 5

3- Para los siguientes casos hipotéticos, proponga una función objetivo. Muestre un ejemplo de aplicación

a) Las soluciones tienen la forma que propuso en a) del ejercicio 1

La función objetivo propuesta es:

$$f(r,h) = \frac{1}{2\pi r^2 + 2\pi h}$$

Por ejemplo, observamos que para $r, h > 0 \rightarrow f > 0$ y de hecho encontramos

un máximo en $r = 0.37002$, $h = 2.3249$, con $f = 0.387782$
El valor disminuye y tiende a 0 en ambos lados del dato máximo

b) Las soluciones tienen la forma que propuso en b) del ejercicio 1.
Suponga que la combinación buscada es $12d - 5i - 20d - 9i - 13d - 6i$
Llamaremos a cada elemento del vector como

t	u	v	w	x	y	z

Para cada movimiento se encontró una fórmula del tipo:

$$-|max - x| + 19$$

Así:

Movimiento	1	$a(u) = -\|11 - u\| + 19$
Movimiento	2	$b(v) = -\|4 - v\| + 19$
Movimiento	3	$c(w) = -\|19 - w\| + 19$
Movimiento	4	$d(x) = -\|8 - x\| + 19$
Movimiento	5	$e(y) = -\|12 - y\| + 19$
Movimiento	6	$f(z) = -\|5 - z\| + 19$

Al integrar todo tenemos:

$$g(t,u,v,w,x,y,z) = t\,[a(u) + b(v) + c(w) + d(x) + e(y) + f(z)]$$

c) Las soluciones tienen la forma que propuso en d) del ejercicio 1.
Suponga que la función booleana es $f(a,b,c,d,e) = abd' + a'b'ce + ade'$
Notemos que con cualquier combinación siguiente resolvemos el problema

1	1	-	0	-
0	0	1	-	1
1	-	-	1	0

Definimos $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Y usamos el vector:

a	b	c	d	e

Finalmente la función resultante es:

$$f(x) = \max\left(\frac{a + b + h(d)}{3}, \frac{h(a) + h(b) + c + e}{4}, \frac{a + d + h(e)}{3}\right)$$

d) Se desea resolver el problema de las reinas en un tablero de 8×8
Suponiendo un modelado de un vector de dimensión 2 para cada reina y que no pueden ocupar el mismo espacio, fila o columna para comparar que no se encuentren en diagonal observemos que si:

$$r_1[0] + r_1[1] = r_2[0] + r_2[1] \quad ó \quad r_1[0] - r_1[1] = r_2[0] - r_2[1]$$

se encuentran en diagonal

Definimos
$$g(r_i) = r[0] + r[1]$$
$$h(r_i) = r[0] - r[1]$$

Definimos también:

$$p(r) = \sum_{i=1}^{7} |g(r_0) - g(r_i)| + \sum_{i=2}^{7} |g(r_1) - g(r_i)| + \dots + \sum_{i=6}^{7} |g(r_5) - g(r_i)| + |g(r_6) - g(r_7)|$$

$q(r)$ tendrá una definición similar a p con el ligero cambio de usar $h(r)$ en lugar de $g(r)$

$f(r)$ finalmente es:

$$f(r) = p(r) + q(r)$$

Obtendremos 0 en cada $g(r)$ o $h(r)$ si hay reinas en las mismas diagonales, lo que causa un menor valor en la función objetivo