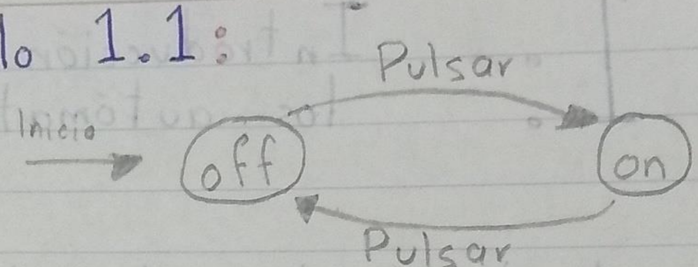
Capítulo 1: Introducción a los autómatas

Contenido:

- ¿Por qué estudiar la teoría de autómatas?
  - Introducción a los autómatas finitos
  - Representaciones estructurales
  - Autómatas y complejidad
- Introducción a las demostraciones formales
  - Demostraciones deductivas
  - Reducción a definiciones
  - Otras formas de teoremas
  - Teoremas que parecen no ser proposiciones Si-entonces
- Otras formas de demostración
  - Demostración de equivalencias entre conjuntos
  - La conversión contradictoria
  - Demostración por reducción al absurdo
  - Contraejemplos
- Demostraciones inductivas
  - Inducciones sobre números enteros
  - Formas más generales de inducción sobre enteros
  - Inducciones estructurales
  - Inducciones mutuas
- Conceptos fundamentales de la teoría de autómatas
  - Alfabetos
  - Cadenas de caracteres
  - Lenguajes
  - Problemas

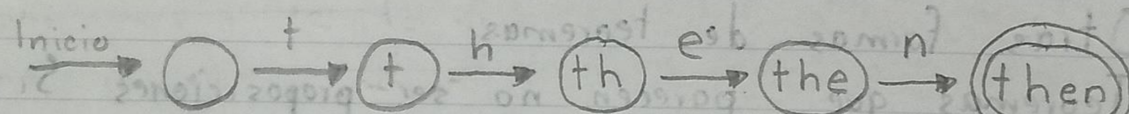
Ejemplo 1.1:



Modelo de un autómata finito de un interruptor de apagado / encendido

Ejemplo 1.2:

Modelo de un autómata finito para el reconocimiento de la palabra then



Teorema 1.3:

Si $x \geq 4$, entonces $2^x \geq x^2$

Demostración: Si $x=3$, $2^3=8$ pero es menor que $3^2=9$

Así como si $x=4$, $2^4=16$ y $4^2=16$

Para $x=5$ la propósición también es verdadera, pues $32>25$

Cuando $x>4$, el lado izquierdo de la ecuación: 2^x se duplica cada vez que x aumenta una unidad, mientras que x^2 aumenta según la relación $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$. Si $x \geq 4$, entonces $\frac{x+1}{x}$ no puede ser mayor a 1.25, por tanto $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ no puede ser mayor a 1.5625 y como $1.5625 < 2$ cada vez que $x \geq 4$, la desigualdad se satisfará

Conversión contradictoria

Teorema 1.4:

Si x es la suma de los cuadrados de cuatro enteros positivos, entonces $2^x \geq x^2$

Demostración:

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ arbitrarios tales que:

$$a+b+c+d = x$$

entonces:

	Proposición	Justificación
1.-	$x = a^2+b^2+c^2+d^2$	Dado
2.-	$a \geq 1;\ b \geq 1;\ c \geq 1;\ d \geq 1$	Dado
3.-	$a^2 \geq 1;\ b^2 \geq 1;\ c^2 \geq 1;\ d^2 \geq 1$	De 2 y propiedades aritméticas
4.-	$x \geq 4$	De 1 y 3 y propiedades aritméticas
5.-	$2^x \geq x^2$	De 4 y Teorema 1.3

$\boxed{//}$

Teorema 1.5:

Sea S un subconjunto finito de un determinado conjunto infinito U. Sea T el conjunto complementario de S con respecto a U. Entonces T es infinito

Reducción al absurdo

Demostración:

Sabemos que $S \cup T = U$ y que S y T son disjuntos. Por lo que $\|S\| + \|T\| = \|U\|$

Dado que S es finito, $\|S\| = n$ para algún entero n

Como U es infinito, no existe ningún entero p tal que $\|U\| = p$

Ahora suponemos que T es finito, es decir: $||T|| = m$ para algún m.
Decimos entonces:
$$||U|| = ||S|| + ||T|| = n + m$$
Es decir que U tendría $n+m$ elementos, lo que contradice la proposición dado de que no existe ningún entero p que sea igual a $||U||$
$\boxed{//}$

Ejemplo 1.6:
El enunciado del teorema 1.3 puede expresarse de las siguientes formas:
- $x \geq 4$ implica $2^x \geq x^2$
- $x \geq 4$ sólo si $2^x \geq x^2$
- $2^x \geq x^2$ si $x \geq 4$
- Si $x \geq 4$ entonces $2^x \geq x^2$

Teorema 1.7:
Sea x un número real. Entonces $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ si y sólo si x es un entero.
Demostración:
Parte sólo si $(\rightarrow)$:
Suponemos que $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$
Utilizando las definiciones de suelo y techo observamos:
$$\lfloor x \rfloor \leq x \quad y \quad \lceil x \rceil \geq x$$
Sin embargo partimos de que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$
Luego podemos sustituir el suelo por el

techo en la primera desigualdad:

$$\lceil x \rceil \leq x$$

Como $\lceil x \rceil \leq x$ y $\lceil x \rceil \geq x$ se cumplen, concluimos que $\lceil x \rceil = x$

Y dado que $\lceil x \rceil$ es siempre un entero, x también tiene que ser un entero en este caso

Parte si $(\leftarrow)$:

Supongamos que x es un entero. Por las definiciones de suelo y techo, cuando x es un entero, tanto $\lfloor x \rfloor$ como $\lceil x \rceil$ son iguales a x y por tanto iguales entre sí

$\boxed{//}$

Teorema 1.8:

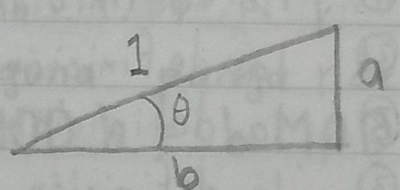
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Demostración:

El teorema oculta una hipótesis:

Si θ es un ángulo, entonces $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Observemos el siguiente triángulo:



$$\text{sen}\,\theta = \frac{a}{1} = a \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{b}{1} = b$$

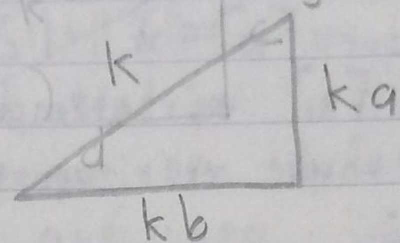
Ahora, por teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Finalmente para generalizar a un triángulo de hipotenusa $k \in \mathbb{R} \cdot \rightarrow \cdot k > 0$

Por semejanza de triángulos



$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2$$
$$k^2 \operatorname{sen}^2\theta + k^2 \cos^2\theta = k^2$$
$$k^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = k^2$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\boxed{//}$

Teorema 1.10:

$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$$

Demostración:

Parte si $(\rightarrow)$:

	Proposición	Justificación
1.	$x \in R \cup (S \cap T)$	Postulado
2.	$x \in R$ ó $x \in S \cap T$	① y la definición de unión
3.	$x \in R$ ó $x \in S$ y T	② y la definición de intersección
4.	$x \in R \cup S$	③ y la definición de unión
5.	$x \in R \cup T$	③ y la definición de unión
6.	$x \in (R \cup S) \cap (R \cup T)$	④, ⑤ y la definición de intersección

Contraejemplos

Parte sólo si ($\leftarrow$):

	Proposición	Justificación
1.	$x \in (R \cup S) \cap (R \cup T)$	Postulado
2.	$x \in R \cup S$	① y la definición de intersección
3.	$x \in R \cup T$	① y la definición de intersección
4.	$x \in R$ ó $x \in S$ y T	②, ③ y el razonamiento sobre la unión
5.	$x \in R$ ó $x \in S \cap T$	④ y la definición de intersección
6.	$x \in R \cup (S \cap T)$	⑤ y la definición de unión

Supuesto teorema 1.13:

Todos los números primos son impares. Más formalmente podemos enunciar que: si un entero x es un número primo, entonces x es impar

Refutación:

El entero 2 es primo, pero es par

Supuesto teorema 1.14:

No existe ninguna pareja de enteros a y b tal que $a \text{ MOD } b = b \text{ MOD } a$

Refutación:

Sea $a = b = 2$

Luego $a \text{ MOD } b = b \text{ MOD } a = 0$

Teorema 1.15:

$a \text{ MOD } b = b \text{ MOD } a$ si y sólo si $a = b$

Demostración:

Parte si ($\leftarrow$):

Suponemos $a = b$

Como $x \text{ MOD } x = 0$ para cualquier entero x

$a \text{ MOD } b = b \text{ MOD } a = 0$ cuando $a = b$

Parte sólo si ($\rightarrow$):

Suponemos que $a \text{ MOD } b = b \text{ MOD } a$

Reduciremos al absurdo, entonces suponemos que $a \neq b$. Tenemos entonces los casos $a < b$ y $b < a$

Si $a < b$, entonces $a \text{ MOD } b = a$ y $b \text{ MOD } a < a$

lo que nos ha llevado a una contradicción, por lo que concluimos que el teorema es verdadero.

Teorema 1.16:

Para todo $n \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostración:

Bases:

Elegimos $n = 0$

Cuando el límite superior de una sumatoria es menor que el límite inferior, la suma no se realiza sobre ningún término y por tanto es igual a 0

Elegimos $n=1$:

$$\frac{(1)(1+1)(2(1)+1)}{6}=1$$

Elegimos $n=2$:

$$\frac{(2)(2+1)(2(2)+1)}{6}=5$$

Paso inductivo:

Hemos encontrado que para $m=1,2$ cumple, es decir que:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Pero para $m+1$ tendríamos:

$$\sum_{i=1}^{[m+1]} i^2 = \frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$= \frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6}$$

Ahora, si expandimos para m:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{2m^3+3m^2+m}{6}$$

Nosotros queremos probar que:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} i^2\right) + (m+1)^2 = \frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6}$$

$$\therefore \frac{2m^3+3m^2+m}{6} + m^2+2m+1 = \frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6}$$

$$\frac{2m^3+3m^2+m}{6}+\frac{6m^2+12m+6}{6}=\frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6}$$

$$\frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6}=\frac{2m^3+9m^2+13m+6}{6}$$

$\boxed{//}$

Ejemplo 1.18:

Queremos demostrar que si $n \geq 8$, entonces n puede expresarse como una suma de treses y cincos

Bases:

Si $n=8$, $n=3+5$

Si $n=9$, $n=3+3+3$

Si $n=10$, $n=5+5$

Paso inductivo:

Llamemos k al caso de $n=8$, $k+1$ al caso de $n=9$ y $k+2$ al caso de $n=10$, entonces, $k=3a+5b$ con a,b enteros, que en un principio, $k+1$ y $k+2$ también cumplen

Y para $k+3=3+3a+5b$

Ejemplo 1.19:

La definición recursiva de un árbol puede plantearse de forma de inducción matemática:

Base:

Un único nodo es un árbol y dicho nodo es la raiz del árbol

Paso inductivo:

Si $T_1, T_2, \ldots, T_k$ son árboles, entonces podemos formar un nuevo árbol de la siguiente forma:

1. Comenzamos con un nodo nuevo N que es la raíz del árbol
2. Añadimos copias de todos los árboles $T_1, T_2, \ldots, T_k$
3. Añadimos arcos desde el nodo N hasta las raíces de cada uno de los nodos $T_1, T_2, \ldots, T_k$

Teorema 1.21:

El número de nodos de un árbol es superior al de arcos en una unidad

Demostración:

La proposición formal $S(T)$ que tenemos que demostrar por inducción estructural es: "Si T es un árbol y T tiene n nodos y e arcos, entonces $n = e + 1$"

Base:

El caso base es en el que T tiene un único nodo. Así $n = 1$ y $e = 0$ por lo que la relación $n = e + 1$ se cumple

Paso inductivo:

Sea T un árbol construido a partir del paso inductivo de la definición, a partir de N nodos y k árboles más pequeños $T_1, T_2, \ldots, T_k$

Podemos suponer que las proposiciones $S(T_i)$ se cumplen para $i = 1, 2, \ldots, k$

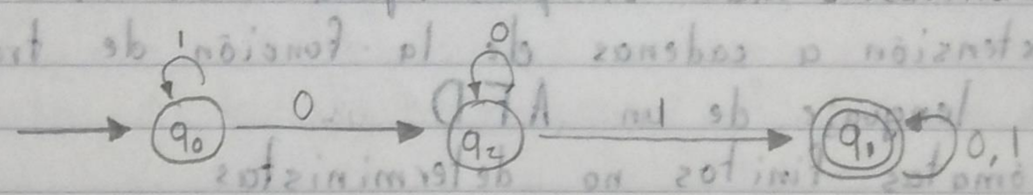
Capítulo 2: Autómatas finitos

Contenido:

- Desciipción formal de autómata finito
  - Reglas básicas
  - El protocolo
  - Cómo permitir que el autómata ignore acciones
  - Un autómata para el sistema completo
  - Utilización del autómata producto para validar el protocolo
- Autómata finito determinista
  - Definición de autómata finito determinista
  - Cómo procesa cadenas un AFD
  - Notaciones más simples para los AFD
  - Extensión a cadenas de la función de transición
  - El lenguaje de un AFD
- Autómatas finitos no deterministas
  - Punto de vista informal de los autómatas finitos no deterministas
  - Definición de autómata finito no determinista
  - Función de transición extendida
  - El lenguaje de un AFN
  - Equivalencia de autómatas finitos deterministas y no deterministas
  - Un caso desfavorable para la construcción de subconjuntos
- Aplicación: búsqueda de texto
  - Búsqueda de cadenas en un texto

- Autómatas finitos no deterministas para búsqueda de texto
  - Un AFD para reconocer un conjunto de palabras clave
- Autómatas finitos con transiciones - ε
  - Usos de las transiciones - ε
  - Notación formal para un AFN - ε
  - Clausuras respecto de epsilon
  - Transiciones y lenguajes extendidos para los AFN - ε
  - Eliminación de las transiciones - ε

Ejemplo 2.2:
Diagrama de transiciones del AFD que acepta todas las cadenas que contienen la subcadena 01



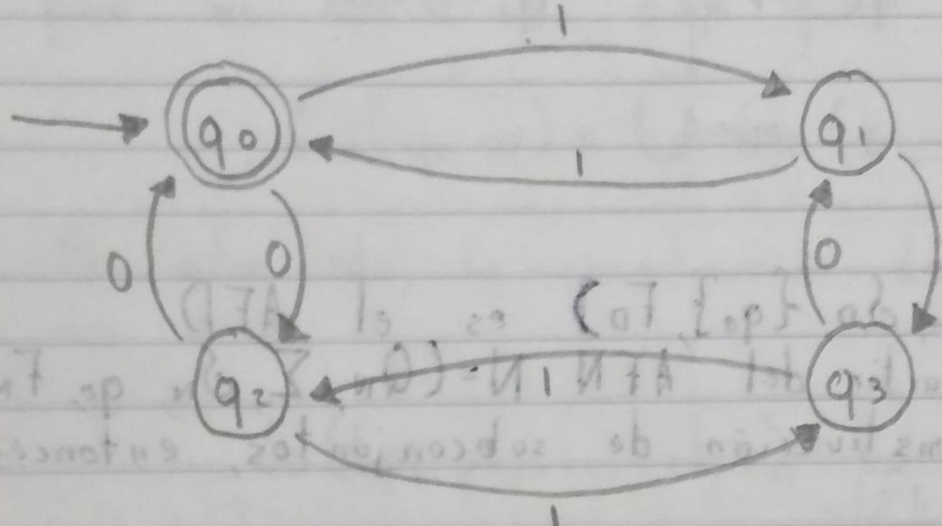
Ejemplo 2.3:
Tabla de transiciones del AFD del Ejemplo 2.2

	0	
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Ejemplo 2.4:

Diseño de un AFD que acepte el lenguaje:

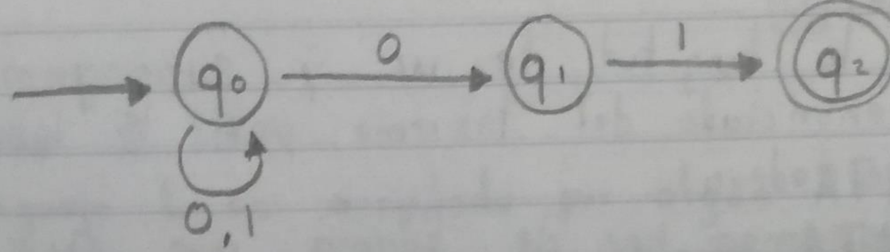
$L = \{ w \mid w$ tiene un número par de ceros y un número par de unos $\}$



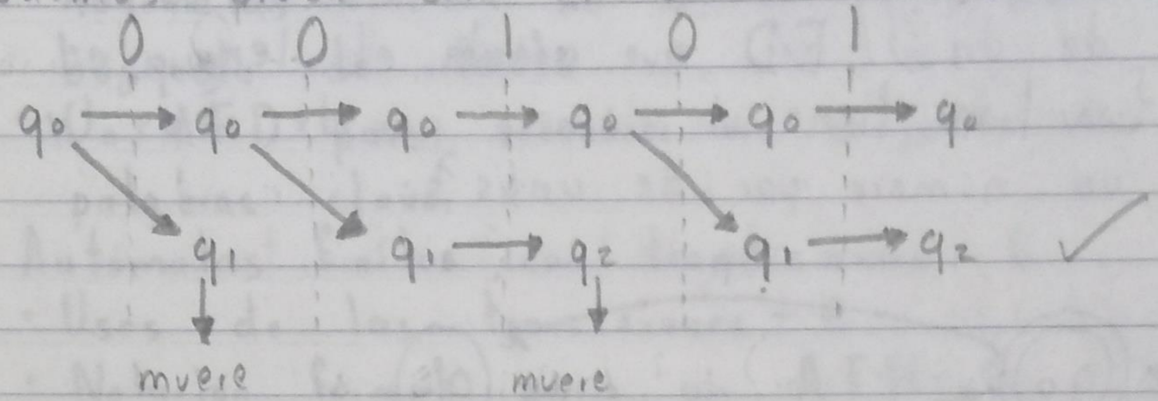
	0	1
$* \rightarrow q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Ejemplo 2.6:

AFN que acepta todas las cadenas que terminan en 01



Podemos probar con la secuencia de entrada 0010



Teorema 2.11:
Si $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ es el AFD construido a partir del AFN $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ mediante la construcción de subconjuntos, entonces $L(D) = L(N)$

Demostración:
En primer lugar, se deberá demostrar por inducción sobre $|w|$ es que

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

Base:
Sea $|w| = 0$, es decir $|w| = \varepsilon$. Basándonos en las definiciones de partida de $\hat{\delta}$ para el AFD y el AFN, tanto $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \varepsilon)$ como $\hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon)$ son iguales a $\{q_0\}$

Paso inductivo:
Sea $n+1$ la longitud de w y supongamos que el enunciado del teorema para la longitud n es verdadero

Descomponemos w de forma que $w = xa$ donde a es el símbolo final de w

Por inducción: $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x)$
Sean $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ dos conjuntos de estados de N
La parte inductiva de la definición de $\hat{\delta}$ para los AFN nos dice que:

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

Por otro lado, la construcción de subconjuntos nos dice:

$$\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

Gracias a la ecuación anterior y al hecho de que $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \{p_1, p_2, \ldots p_k\}$ en la parte inductiva de la definición de $\hat{\delta}$ para los AFD, escribimos:

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x), a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

que también es igual a: $\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots p_k\}, a)$
Que demuestran que $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$ $\boxed{/\!/}$

Teorema 2.12:
Un lenguaje L es aceptado por algún AFD si y sólo si L es aceptado por algún AFN

Demostración:

Parte si ($\rightarrow$):

Esta parte es la construcción de subconjuntos del Teorema 2.11

Parte sólo si ($\leftarrow$):

Hay que convertir un AFD en un AFN idéntico. Sea $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ un AFD. Definimos $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ para que sea el AFN equivalente donde δ_N se define mediante la siguiente regla:

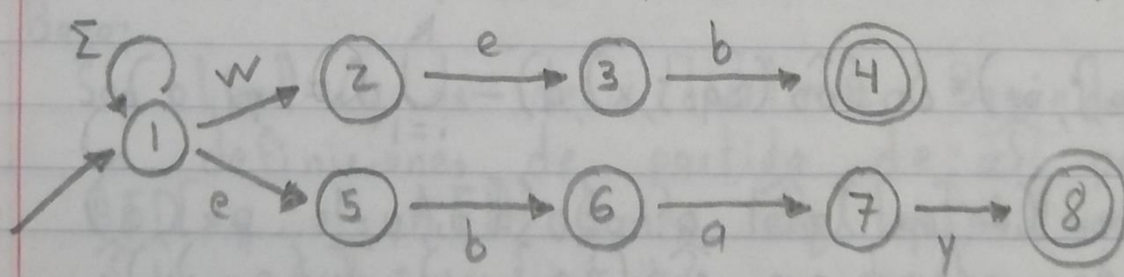
Si $\delta_D(q, a) = p$, entonces $\delta_N(q, a) = \{p\}$

Ahora vemos que por inducción sobre $|w|$ que si $\hat{\delta}_D(q_0, w) = p$ entonces $\hat{\delta}_N(q_0, w) = p$

$\boxed{//}$

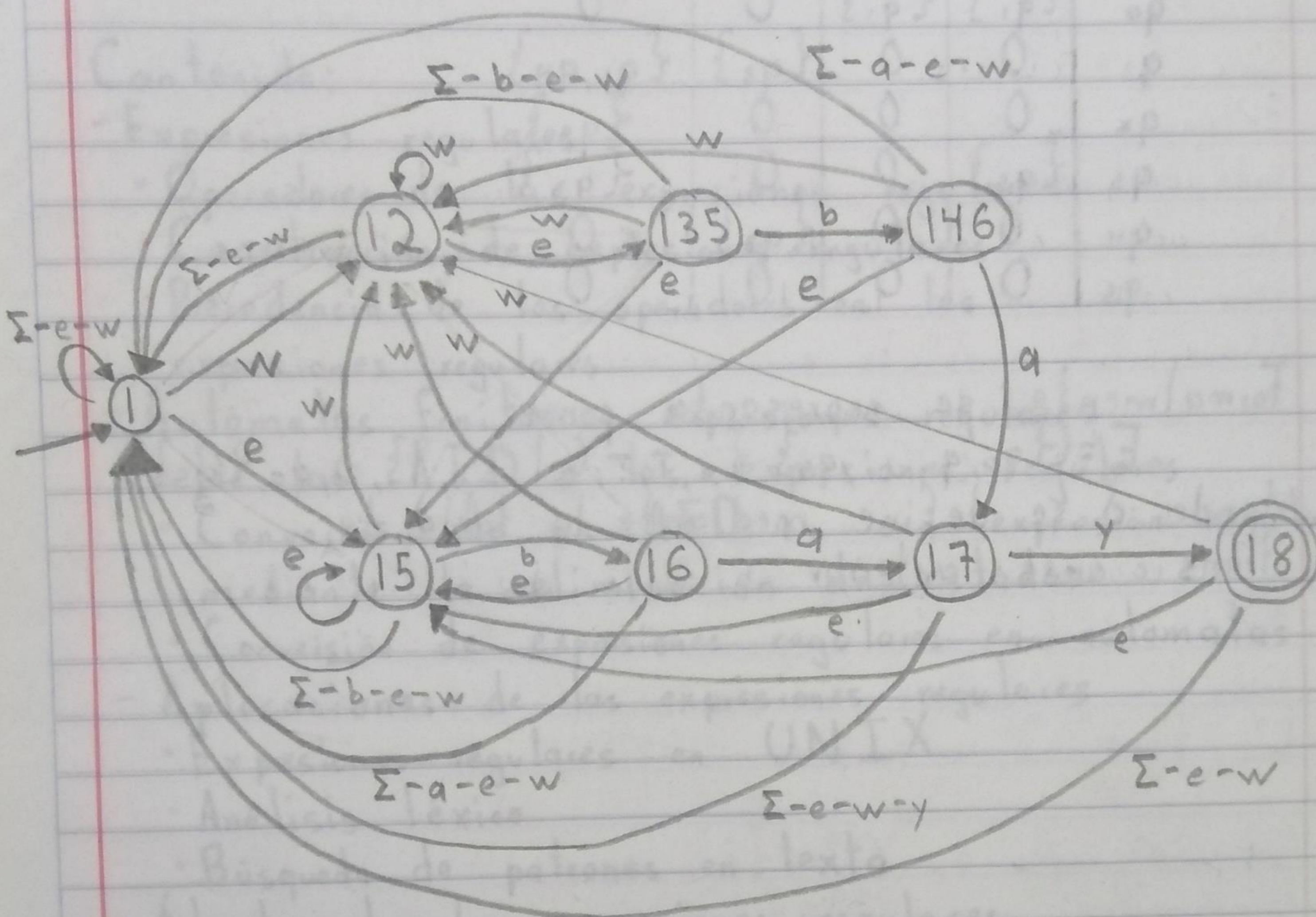
Ejemplo 2.14:

AFN que busca las palabras "web" y "ebay"

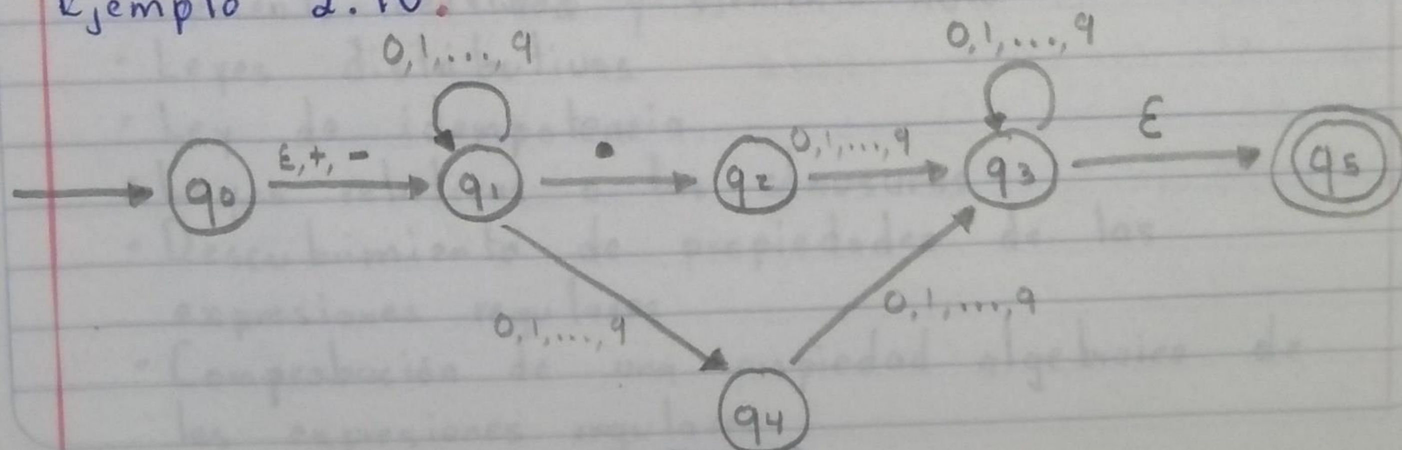


Ejemplo 2.15:

Conversión del AFN del Ejemplo 2.14 en un AFD



Ejemplo 2.16:



Su tabla de transiciones es la siguiente:

	ε	$+, -$	$.$	$0, 1, \ldots, 9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Formalmente se representa como:

$$E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

donde δ se define mediante la tabla de transiciones anterior

Capítulo 3: Lenguajes y expresiones regulares

Contenido:

- Expresiones regulares
  - Operadores de las expresiones regulares
  - Construcción de expresiones regulares
  - Precedencia de los operadores en las expresiones regulares
- Autómatas finitos y expresiones regulares
  - De los AFD a las expresiones regulares
  - Conversion de un AFD en una expresión regular mediante la eliminación de estados
  - Conversión de expresiones regulares en autómatas
- Aplicaciones de las expresiones regulares
  - Expresiones regulares en UNIX
  - Análisis léxico
  - Búsqueda de patrones en texto
- Álgebra de las expresiones regulares
  - Asociatividad y conmutatividad
  - Elemento identidad y elemento nulo
  - Leyes distributivas
  - Ley de idempotencia
  - Leyes relativas a las clausuras
  - Descubrimiento de propiedades de las expresiones regulares
  - Comprobación de una propiedad algebraico de las expresiones regulares

Ejemplo 3.1:

Se estudiará la idea de clausura de un lenguaje

Sea $L = \{0, 11\}$

Entonces $L^0 = \{\varepsilon\}$

Independientemente de qué lenguaje sea L, la potencia 0 representa la selección de cero cadenas del L. $L^1 = L$

Ahora, L^2 consiste en seleccionar dos cadenas de L permitiendo repeticiones, así:

$$L^2 = \{00, 011, 110, 1111\}$$

De forma similar L^3

$$L^3 = \{000, 0011, 0110, 1100, 01111, 11011, 11110, 111111\}$$

Para calcular L^* hay que calcular L^i para cada i y hallar la unión de todos estos lenguajes

L^i tiene 2^i miembros.

Otro ejemplo es $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$

Observemos que $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$, pero por otro lado vemos que $\emptyset^i \; \forall i \geq 1$ es el conjunto vacío ya que no podemos seleccionar ninguna cadena en el conjunto vacío

Y de hecho, $\emptyset$ es uno de los dos lenguajes cuya clausura no es infinita