Capítulo 1: Definiciones, eliminación de constantes arbitrarias

Contenido:
- Ejemplos de ecuaciones diferenciales
- Definiciones
- Eliminación de constantes arbitrarias
- Familias de curvas

1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales

Ejercicio oral:
Identifique las variables independientes, las variables dependientes y los parámetros en las ecuaciones dadas:

1.- $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

Variable independiente: x
Variable dependiente: y

2.- $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$

Variable independiente: x
Variable dependiente: y
Parámetro: k

3.- $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

Reescribimos:
$(x^2 + y^2) - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$

Variable independiente: x
Variable dependiente: y

4.- $\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Variables independientes: t, x, y
Variable dependiente: u
Parámetro: h

5.- $L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E\omega\cos(\omega t)$

Variable independiente: t
Variable dependiente: i
Parámetros: L, R, C, E, ω

6.- $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$
Variables independientes: x, y
Variable dependiente: V

7.- $$\left(\frac{d^2 \omega}{dx^2}\right)^3 - xy\frac{d\omega}{dx} + \omega = 0$$
Variable independiente: x
Variable dependiente: ω
Parámetro: y

8.- $$\frac{d^3 x}{dy^3} + x\frac{dx}{dy} - 4xy = 0$$
Variable independiente: y
Variable dependiente: x

9.- $$\frac{d^2 y}{dx^2} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = 0$$
Variable independiente: x
Variable dependiente: y

10.- $$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} = x$$
Variable independiente: t
Variables dependientes: x, y

11.- $$x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} = nf$$
Variables independientes: x, y
Variable dependiente: f
Parámetro: n

2. Definiciones

Ejercicios orales:
Para cada uno de los ejercicios siguientes, establézcase si la ecuación es ordinaria o parcial, lineal o no lineal, y dése su orden y grado

1.- $$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 2 y grado 1

2.- $$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$
Ecuación parcial lineal de orden 2 y grado 1

3.- $$(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$
Ecuación ordinaria no lineal de orden 1 y grado 1

4.- $$y' + P(x)y = Q(x)$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 1 y grado 1

5.- $$y''' - 3y' + 2y = 0$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 3 y grado 1

6.- $$y\,y'' = x$$
Ecuación ordinaria no lineal de orden 2 y grado 1

7.- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$
Ecuación parcial lineal de orden 2 y grado 1

8.- $$\frac{d^4 y}{dx^4} = \omega(x)$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 4 y grado 1

9.- $$x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2} = c_1$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 2 y grado 1

10.- $$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 1 y grado 1

11.- $$(x+y)\,dx + (3x^2-1)\,dy = 0$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 1 y grado 1

12.- $$x(y'')^3 + (y')^4 - y = 0$$
Ecuación ordinaria no lineal de orden 2 y grado 3

13.- $$\left(\frac{d^3 \omega}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^4 + y\omega = 0$$
Ecuación ordinaria lineal de orden 3 y grado 2

14- $\frac{dy}{dx} = 1 - xy + y^2$

Ecuación ordinaria no lineal de orden 1 y grado 1

15- $y'' + 2y' - 8y = x^2 + \cos(x)$

Ecuación ordinaria lineal de orden 2 y grado 1

16- $a\,da + b\,db = 0$

Ecuación ordinaria no lineal de orden 1 y grado 1

3. Eliminación de constantes arbitrarias

Ejemplo a):

Elimine las constantes arbitrarias c_1 y c_2 de la relación

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} \qquad (1)$$

Ya que dos constantes deben ser eliminadas, se obtienen las dos derivadas:

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} \qquad (2)$$

$$y'' = 4c_1 e^{-2x} + 9c_2 e^{3x} \qquad (3)$$

Sumando la primera ecuación obtenida multiplicada por dos más la segunda:

$$y'' + 2y' = 15 c_2 e^{3x} \qquad (4)$$

Ahora sumamos:

$$2(y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x})$$

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

Y obtenemos:

$$y' + 2y = 5c_2 e^{3x}$$

Que es equivalente a:

$$3(y' + 2y) = 15 c_2 e^{3x}$$

Y al igualar con (4) tenemos

$$y'' + 2y' = 3(y' + 2y)$$

$$y'' + 2y' = 3y' + 6y$$

$$\therefore y'' - y' - 6y = 0$$

Ejemplo b):

Elimine la constante a de la ecuación

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

La diferenciación directa nos da:

$$2(x-a) + 2yy' = 0$$

$$\therefore a = x + yy'$$

Usando la ecuación original encontramos:

$$[x - (x + yy')]^2 + y^2 = (x + yy')^2$$

$$(yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2$$

$$y^2 = x^2 + 2xyy'$$

que también podemos escribir como:

$$(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

Ejemplo c):

Elimine B y α de la relación

$$x = B\cos(\omega t + \alpha) \qquad ①$$

donde ω es un parámetro que no debe eliminarse

Primero obtenemos la primera y segunda derivada de x con respecto a t

$$x' = -\omega B\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) \qquad ②$$
$$x'' = -\omega^2 B\cos(\omega t + \alpha) \qquad ③$$

Comparando ① y ③ obtenemos que:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Ejemplo d):

Elimine c de la relación

$$cxy + c^2x + 4 = 0$$

Derivamos:

$$cy + cxy' + c^2 = 0$$
$$c(y + xy') + c^2 = 0$$
$$c^2 = -c(y + xy')$$
$$\frac{c^2}{c} = -(y + xy')$$

Como $c \neq 0$

$$c = -(y + xy')$$

y al sustituir en la ecuación original

$$(-y - xy')xy + (-y - xy')^2x + 4 = 0$$
$$-xy^2 - x^2yy' + (y^2 + 2xyy' + x^2(y')^2)x + 4 = 0$$
$$\cancel{-xy^2} - \cancel{x^2yy'} + \cancel{xy^2} + 2x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 = 0$$
$$x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 = 0$$

Ejercicios:

En cada uno de los siguientes ejercicios, elimínese las constantes arbitrarias

1- $x^3 - 3x^2y = c$

Derivamos:

$$3x^2 - 3(2xy + x^2y') = 0$$
$$3x^2 - 6xy + 3x^2y' = 0$$
$$3x(x - 2y + xy') = 0$$
$$x - 2y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x - 2y = -x\frac{dy}{dx}$$

$$(x-2y)dx + x\,dy = 0$$

2- $y\,\text{sen}(x) - xy^2 = c$

Derivamos:

$$\frac{dy}{dx}\cdot \text{sen}(x) + y\cdot\cos(x) - \left(y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot \text{sen}(x) + y\cos(x) - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot \text{sen}(x) - 2xy\frac{dy}{dx} = -y\cos(x) + y^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left[\text{sen}(x) - 2xy\right] = -\left[y(\cos(x) + y)\right]$$

$$dy\left[\text{sen}(x) - 2xy\right] = -\left[y(\cos(x)+y)\right]dx$$

$$y\left[\cos(x) + y\right]dx + \left[\text{sen}(x) - 2xy\right]dy = 0$$

4- $x^2y = 1 + cx$

Derivamos:

$$2xy + x^2\cdot\frac{dy}{dx} = c$$

Como ahora conocemos el valor de c, sustituimos:

$$x^2y = 1 + \left(2xy + x^2\cdot\frac{dy}{dx}\right)x$$

$$x^2y = 1 + 2x^2y + x^3\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$0 = 1 + x^2y + x^3\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$-x^3\cdot\frac{dy}{dx} = 1 + x^2y$$

$$-x^3\,dy = (1 + x^2y)\,dx$$

$$(1 + x^2y)\,dx + x^3\,dy = 0$$

5- $cy^2 = x^2 + y$

Derivamos:

$$2cy\cdot\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$$

Multiplicamos todo por y

$$2cy^2\cdot\frac{dy}{dx} = \left(2x + \frac{dy}{dx}\right)y$$

Como $cy^2 = x^2 + y$ sustituimos

$$2(x^2 + y)\frac{dy}{dx} = 2xy + y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$2x\,dy = y\,dx$

$2x\frac{dy}{dx} = y$

$$2x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2xy + y\frac{dy}{dx}$$

$$2x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$(2x^2+y)\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$(2x^2+y)\,dy = 2xy\,dx$$

$$2xy\,dx - (2x^2+y)\,dy = 0$$

7.- $x = c_1\cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t)$; ω es un parámetro

Derivamos dos veces, pues hay dos constantes a eliminar:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega c_1\,\mathrm{sen}(\omega t) + \omega c_2\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 c_1\cos(\omega t) - \omega^2 c_2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

De esta última ecuación observemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(c_1\cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t))$$

Y por la ecuación original, sustituimos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

8.- $y = cx + c^2 + 1$

Derivamos:

$$y' = c$$

Ahora sustituimos:

$$y = (y')x + (y')^2 + 1$$

$$\therefore y = xy' + (y')^2 + 1$$

9.- $y = mx + \frac{h}{m}$; h un parámetro, m debe ser eliminado

Derivamos:

$$y' = m$$

$$\therefore y = xy' + \frac{h}{y'}$$

10.- $y^2 = 4ax$

Derivamos:

$$2yy' = 4a$$

Sustituimos:

$$y^2 = (2yy')x$$

$$y^2 = \left(2y\frac{dy}{dx}\right)x$$

$$y = 2x\frac{dy}{dx}$$

$$y\,dx = 2x\,dy$$

$$\therefore 2x\,dy - y\,dx = 0$$

11.- $y = ax^2 + bx + c$

Derivamos tres veces:

$$y' = 2ax + b$$

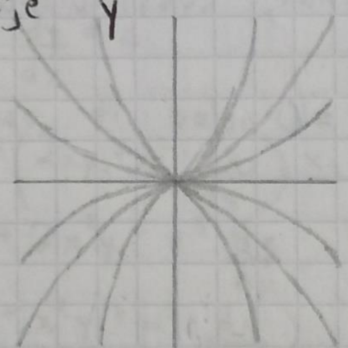
$$y'' = 2a$$

$$y''' = 0$$

4. Familias de curvas

Ejemplo a):

Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas que tienen sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje y



Por la geometría analítica, sabemos que la ecuación de esta familia de parábolas es:

$$x^2 = 4ay$$

Entonces de

$$\frac{x^2}{y} = 4a$$

La a se elimina por diferenciación:

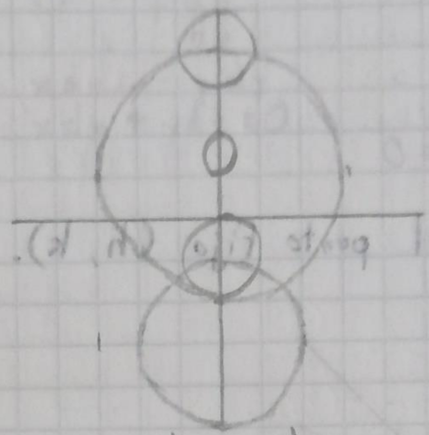
$$2xy\,dx - x^2\,dy = 0$$

Podemos escribir la ecuación diferencial como:

$$2y\,dx - x\,dy = 0$$

Pues $x = 0$ todavía es solución y nada se ha perdido al quitar el factor x

Ejemplo b):
Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que tienen sus centros sobre el eje y



Construimos a partir de:

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Derivamos:

$$2x + 2(y-b)y' = 0$$
$$x + (y-b)y' = 0$$

de la cual

$$\frac{x + yy'}{y'} = b$$

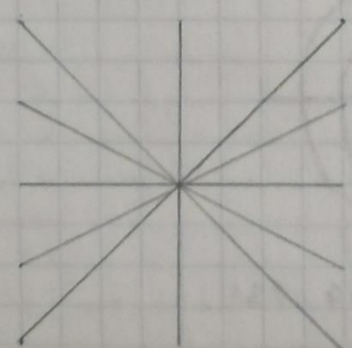
Entonces

$$\frac{y'[1 + yy'' + (y')^2] - y''(x + yy')}{(y')^2} = 0$$

La ecuación diferencial deseada es:

$$xy'' - (y')^3 - y' = 0$$

Ejercicios:
En cada uno de los ejercicios obténgase la ecuación diferencial de la familia de curvas planas descritas y bosquéjense algunos miembros representativos de la familia
1.- Rectas que pasan por el origen
Modelamos:



Sabemos que la ecuación de esta familia es:

$$y = mx$$

Derivamos:

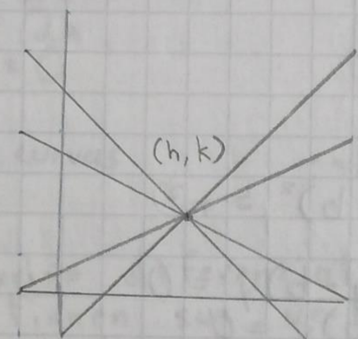
$$y' = m$$

$$\therefore y = x\frac{dy}{dx}$$

$$y\,dx = x\,dy$$

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

2.- Rectas que pasan por el punto fijo (h, k). h y k no deben eliminarse



Sabemos que la ecuación de esta familia es:

$$(y-k) = m(x-h)$$

$$y - k = mx - mh$$

Al derivar:

$$y' = m$$

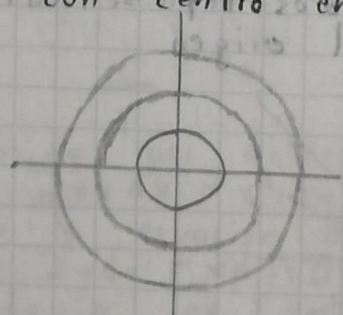
$$\therefore y - k = y'x - y'h$$

$$(y-k) = y'(x-h)$$

$$(y-k) = (x-h)\frac{dy}{dx}$$

$$(y-k)\,dx - (x-h)\,dy = 0$$

7.- Circunferencias con centro en el origen



La ecuación de esta familia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Al derivar:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = -y\frac{dy}{dx}$$

$$x\,dx = -y\,dy$$

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

Capítulo 2: Ecuaciones de primer orden y primer grado

Contenido:
- Soluciones generales de ecuaciones diferenciales ordinarias
- Separación de variables
- Sobre la forma de las soluciones
- La notación EXP U
- Funciones homogéneas
- Ecuaciones con coeficientes homogéneos
- Ecuaciones exactas
- Métodos de solución
- La ecuación lineal de primer orden

5. Soluciones generales de ecuaciones diferenciales ordinarias

6. Separación de variables

Ejemplo a):
Resolver la ecuación:

$$2(y+3)\,dx - xy\,dy = 0$$

$$2(y+3)\,dx = xy\,dy$$

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{y\,dy}{y+3}$$

$$\frac{2\,dx}{x} - \frac{y\,dy}{y+3} = 0$$

Ya hemos separado las variables
Ahora reescribimos:

$$\frac{2\,dx}{x} - \left[1 - \frac{3}{y+3}\right]dy = 0$$

De aquí podemos escribir la solución como:

$$2\ln(x) - y + 3\ln(y+3) = c$$

Ejemplo b):
Resolver la ecuación:

$$(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$$

con la "condición a la frontera" que cuando $x=0$, $y=-1$

$$(1+y^2)\,dx = -(1+x^2)\,dy$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

de la cual se obtiene que:

$\exp(y^2)$ $\quad y^{-3}\,dy$ $\quad \frac{y}{-2}$ $\quad du = 2y\,dy$

$x^2 \cdot x^3$ $\quad (x^2)^3$ $\quad x^6$ $\quad e^u$ $\quad u = y^2$

x^5

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = c$$

Como:

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$$

Ya que $\tan^{-1}(0) = 0$ y $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

La solución al problema de valores a las fronteras es:

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = -\frac{\pi}{4}$$

7. Sobre la forma de las soluciones

8. La notación exp u

Ejercicios:

Obténgase la solución general

1- $(4+x)y' = y^3$

$$(4+x)\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^3} = 1$$

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{dx}{4+x}$$

$$\int\frac{dy}{y^3} = \int\frac{dx}{4+x}$$

$$-\frac{1}{2y^2} + c_1 = \ln|4+x| + c_2$$

$$-\frac{1}{y^2} = \ln|4+x| + c$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \ln|4+x| + \ln|c|$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \ln|c(4+x)|$$

$$-\frac{1}{2} = y^2\ln|c(4+x)|$$

$$-1 = 2y^2\ln|c(4+x)|$$

2- $\exp(y^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$

$$\exp(y^2)\,dx = -x^2y\,dy$$

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{y\,dy}{\exp(y^2)}$$

$$-\int x^{-2}\,dx = \int\exp(-y^2)\,y\,dy$$

Como $u = -y^2$ $\quad du = -2y\,dy$

$$x^{-1} + c_1 = -\frac{1}{2}\int\exp(-y^2)(-2y)\,dy$$

$$\frac{1}{x} + c_1 = -\frac{1}{2}\int \exp(u)\, du$$

$$\frac{1}{x} + c_1 = -\frac{\exp(u)}{2} + c_2$$

$$\frac{1}{x} + c_1 = -\frac{\exp(-y^2)}{2} + c_2$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{\exp(-y^2)}{2} + c$$

$$1 = -\frac{x\exp(-y^2)}{2} + cx$$

$$\frac{x\exp(-y^2)}{2} + 1 = cx$$

$$x\exp(-y^2) + 2 = cx$$

3- $\cos(x)\cos(y)\,dx + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\,dy = 0$

$$\cos(x)\cos(y)\,dx = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\,dy$$

$$-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}dx = \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}dy$$

$$-\int \cot(x)\,dx = \int \tan(y)\,dy$$

$$-\ln|\operatorname{sen}(x)| = -\ln|\cos(y)| + C$$

$$\ln|\operatorname{sen}(x)| = \ln|C\cos(y)|$$

$$\exp[\ln|\operatorname{sen}(x)|] = \exp[\ln|C\cos(y)|]$$

$$\operatorname{sen}(x) = C\cos(y)$$

4- $3y\,dx = 2x\,dy$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{3y}$$

$$\int\frac{dx}{2x} = \int\frac{dy}{3y}$$

$$\frac{1}{2}\int x^{-1}\,dx = \frac{1}{3}\int y^{-1}\,dy$$

$$\frac{\ln|x|}{2} = \frac{\ln|y|}{3} + c$$

$$\frac{3\ln|x|}{2} = \ln|y| + c$$

$$3\ln|x| = 2\ln|y| + c$$

$$3\ln|x| = 2\ln|y| + \ln(c)$$

$$\ln|x^3| = \ln|cy^2|$$

$$\exp(\ln|x^3|) = \exp(\ln|cy^2|)$$

$$x^3 = cy^2$$